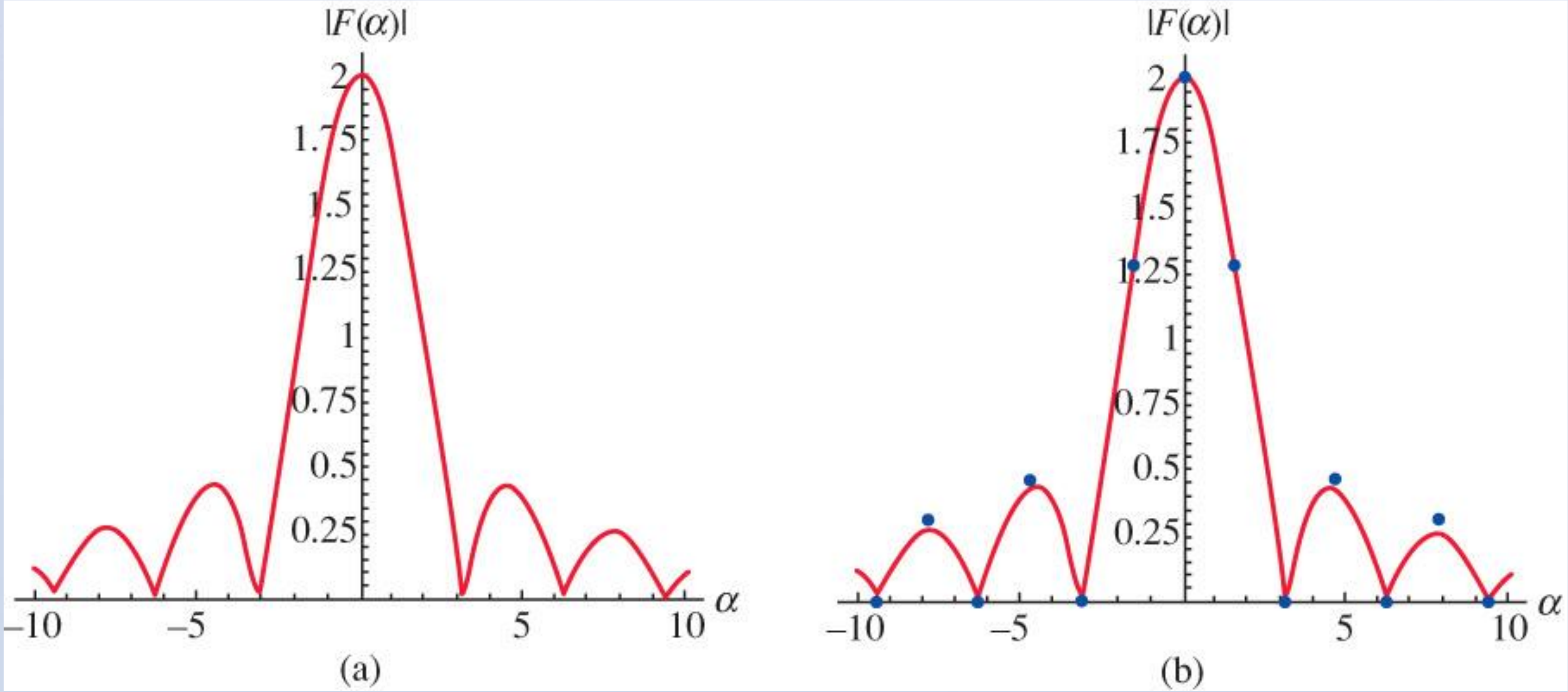
Engineering Math 2 (12026003)



Lecture 7 (Integral Transform Method)

Dr. Santhad Chuwongin

Outline

15.1 ฟังก์ชันข้อผิดพลาด (Error Function)

15.2 การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ (Applications of the Laplace Transform)

15.3 การอินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier Integral)

15.4 การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transforms)

15.5 การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform)

ฟังก์ชันข้อผิดพลาด (Error Function)

- ฟังก์ชันข้อผิดพลาด

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du$$

- ฟังก์ชันข้อผิดพลาดเพิ่มเติม (Complementary error function)

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2}\, du$$

- ฟังก์ชันทั้งสองสัมพันธ์กันดังนี้

$$\operatorname{erf}(\mathrm{x}) + \operatorname{erf}\mathrm{c}(\mathrm{x}) = 1$$

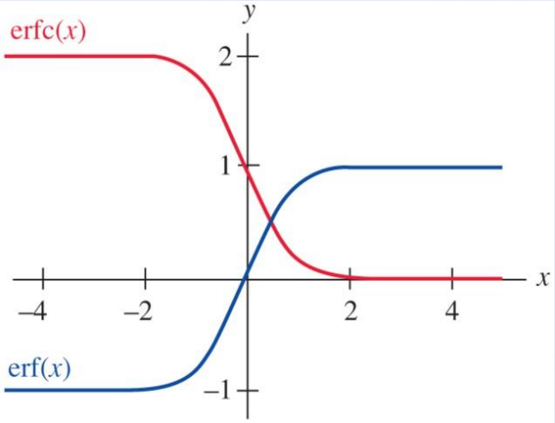


Figure 15.1.2: Graphs of erf(*x*) and erfc(*x*)

ฟังก์ชันข้อผิดพลาด (Error Function)

- ประโยชน์สำหรับการแปลงลาปลาซ

TABLE 15.1.1

$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	**4.** $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-a^2/4t} - a \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
2. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	**5.** $e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
3. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	**6.** $-e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + b)}$

การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ
(Applications of the Laplace Transform)

- สมมุติว่าคุณสมบัติในการดำเนินการแปลงลาปลาซ ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร เพื่อนำไปใช้กับฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

- <u>ตัวอย่าง:</u>

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0)$$

- เป็นไปตามนี้

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2U}{dx^2}$$

การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ

(Applications of the Laplace Transform)

- ตัวอย่าง: การแปลงสมการอนุพันธ์ย่อย (PDE)
- จงหาการแปลงลาปลาซ ของสมการคลื่น (wave equation)

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \ , t > 0$$

จากคุณสมบัติการแปลงอนุพันธ์ย่อย

$$\mathcal{L}\left\{a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 u}{dt^2}\right\}$$

จะกลายเป็น

$$a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x,t)\} = s^2 \mathcal{L}\{u(x,t) - su(x,0) - u_t(x,0)\}$$

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -su(x,0) - u_t(x,0)$$

การอินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier Integral)

- การอินทิกรัลฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f ถูกนิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$โดยมีค่าเท่ากับ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\, d\alpha$$

โดยที่

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx$$

การอินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier Integral)

- การอินทิกรัลฟูเรียร์ของฟังก์ชันคู่บนช่วง $(-\infty, \infty)$ คือการอินทิกรัลโคไซน์ฟังก์ชัน (cosine integral) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} A(\alpha)\cos \alpha x \, d\alpha$ โดยที่ $A(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx$
- การอินทิกรัลฟูเรียร์ของฟังก์ชันคี่บนช่วง $(-\infty, \infty)$ คือการอินทิกรัลไซน์ฟังก์ชัน (sine integral) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B(\alpha)\sin \alpha x \, d\alpha$ โดยที่ $B(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx$

การอินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier Integral)

- การอินทิกรัลฟูเรียร์ ยังสามารถจัดให้อยู่ในรูป เชิงซ้อน หรือเอกซ์โพเนนเชียล ได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$$

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transforms)

- การแปลงฟูเรียร์ และ อินเวอร์สของมัน คือคู่ของการแปลง
- ถ้า $\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$ ดังนั้นอินเวอร์สของการแปลงลาปลาซ คือ คอนทัวร์อินทิกรัล

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)ds = f(t)$$

- ถ้า $f(x)$ ถูกแปลงเป็น $F(\alpha)$ โดยการแปลง $F(\alpha) = \int_a^b f(x)\, K(\alpha, x)dx$

  ดังนั้นฟังก์ชันสามารถแปลงกลับโดยใช้อินเวอร์สการแปลง

  $f(x) \ = \int_c^b F(\alpha)\, H(\alpha, x)d\alpha$

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transforms)

- คู่ของการแปลงฟูเรียร์ แสดงดังตารางด้านล่าง

Definition 15.4.1 Fourier Transform Pairs

(*i*)	Fourier transform:	$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\, dx = F(\alpha)$	(5)
	Inverse Fourier transform:	$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha = f(x)$	(6)
(*ii*)	Fourier sine transform:	$\mathscr{F}_s\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx = F(\alpha)$	(7)
	Inverse Fourier sine transform:	$\mathscr{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha = f(x)$	(8)
(*iii*)	Fourier cosine transform:	$\mathscr{F}_c\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx = F(\alpha)$	(9)
	Inverse Fourier cosine transform:	$\mathscr{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha = f(x)$	(10)

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transforms)

- การตรวจสอบการแปลงของอนุพันธ์จะช่วยในการประยุกต์ใช้กับแนวคิด BVPs
  - การแปลงฟูเรียร์ $F\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) + \alpha f(0)$
  - การแปลงฟูเรียร์ไซน์ $F_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - \alpha f(0)$
  - การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ $F_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0)$
- ทางเลือกในการใช้การแปลงกับ BVPs ขึ้นอยู่กับประเภทของเงื่อนไขขอบเขตซึ่งถูกกำหนดให้เท่ากับศูนย์

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform)

- พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งถูกนิยามและต่อเนื่องบนช่วง $[0,2p]$
  - $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ คือจุดซึ่งถูกแบ่งเท่าๆกันบนช่วง
  - ฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับค่า $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ...คือ $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ ซึ่งแทนการแซมพลิงที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete sampling) ของ f

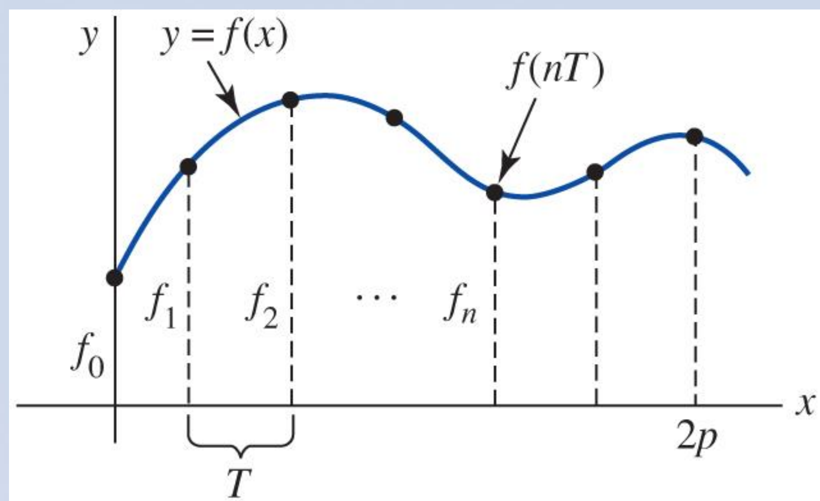


Figure 15.5.1: Sampling of a continuous function

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว : แซมพลิง
(Fast Fourier Transform : Sampling)

- แซมพลิง (sampling)
  - T เป็นอัตราการแซมพลิง, หรือความยาวของช่วงการแซมพลิง
  - $\omega = \frac{2\pi}{2p}$ คือ ความถี่เชิงมุมมูลฐาน (fundamental frequency)
  - $2p$ คือ คาบมูลฐาน
  - ถ้า f ต่อเนื่องที่ T, แซมเพิลของ f ที่ T จะเป็นผลคูณของฟังก์ชัน f และค่าฟังก์ชันดิแรกเดลตา (Dirac delta), และค่าสัญญาณไม่ต่อเนื่อง (discrete signal) ของ f คือ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-nT)$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว : แซมพลิง
(Fast Fourier Transform : Sampling)

- การประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์ และคุณสมบัติการกรองสัญญาณของฟังก์ชันดิแรกเดลตา, เราจะทราบว่าการแปลงฟูเรียร์ไม่ต่อเนื่อง (discrete Fourier transform-DFT) จะเป็นดังนี้

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, e^{i\alpha nT}$$

  - พิจารณาค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ ถูกแบ่งเป็น N ส่วนเท่าๆกัน, $x = nT, n = 0,1,2,\ldots,N-1$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว : แซมพลิง
(Fast Fourier Transform : Sampling)

– อนุกรมฟูเรียร์ไม่ต่อเนื่อง (finite (discrete) Fourier series)

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

และทำให้

$$\omega_n = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{N-1} \\
f_1 &= c_0 + c_1\omega_N + c_2\omega_N^2 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{N-1} \\
f_2 &= c_0 + c_1\omega_N^2 + c_2\omega_N^4 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{2(N-1)} \\
&\vdots \\
f_{N-1} &= c_0 + c_1\omega_N^{N-1} + c_2\omega_N^{2(N-1)} + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{(N-1)^2}.
\end{aligned}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว : แซมพลิง
(Fast Fourier Transform : Sampling)

ระบบถูกแสดงด้วยสัญลักษณ์เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว : แซมพลิง
(Fast Fourier Transform : Sampling)

– ให้ $N \times N$ เมทริกซ์ เป็น F_N

– ถ้า $\overline{F_N}$ เป็นเมทริกซ์ของคอนจูเกตเชิงซ้อนของ F_N และ $\boldsymbol{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์, ดังนั้น

$$F_N\overline{F_N} = \overline{F_N}F_N = N\boldsymbol{I} \Longrightarrow {F_N}^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F_N}$$

– เป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform)

- ถ้าสัญญาณเป็นแถบจำกัด (band-limited) (ย่านความถี่ของสัญญาณ คล้ายแถบ $-A < k < A$), สัญญาณจะถูกสร้างขึ้นใหม่โดยการแซมพลิง 2 เท่าของความถี่สูงสุด สำหรับแต่ละไซเคิล

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \frac{\sin(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว
(Fast Fourier Transform)

- DFT ถูกเขียนได้ดังนี้

$$F\left(\frac{2\pi k}{nT}\right) = T\sum_{j=0}^{n-1} f(jT)\,{\omega_n}^{kj}, k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

- หรือ, แสดงด้วยสัญลักษณ์อย่างง่าย

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j\,{\omega_n}^{kj}, k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

- สัญลักษณ์ ทางเมทริกซ์ $\mathbf{f} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{n}}\mathbf{c}$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform)

- <u>ตัวอย่าง</u> ให้ $\mathrm{n} = 2^2 = 4$ และให้ $F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$
- $F_4 = \mathrm{ABP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$ ดังนั้น
- $F_4 c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 25 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -5-15i \\ -14 \\ -5+15i \end{bmatrix} = \mathbf{f}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform)

- กุญแจสำคัญของการแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว (FFT) คือคุณสมบัติของ ω_n และการแยกตัวประกอบเมทริกซ์ (matrix factorization)
- ถ้า $n = 2^N$ เราสามารถเขียน $\boldsymbol{F}_n$ ตามรูปแบบด้านล่างนี้ได้

$$\mathbf{F}_{2^N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2^{N-1}} & \mathbf{D}_{2^{N-1}} \\ \mathbf{I}_{2^{N-1}} & \mathbf{D}_{2^{N-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{2^{N-1}} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{2^{N-1}} \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

- $\mathbf{I}_{2^{N-1}}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์และ $\boldsymbol{P}$ คือการเรียงสับเปลี่ยนเมทริกซ์ (permutation matrix) ซึ่งจัดเรียงใหม่ $\boldsymbol{c}$

$$\mathbf{D}_{2^{N-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega_{2^N} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\omega_{2^N}\right)^{2^{N-1}-1} \end{bmatrix}$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว

(Fast Fourier Transform)

- $\boxed{a_3}$ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ $\boxed{a_0}$ $*$ $\boxed{b_3}$ $\boxed{b_2}$ $\boxed{b_1}$ $\boxed{b_0}$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^7$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^7$$

$$FFT(A) \Rightarrow A(\omega_0) \quad A(\omega_1) \quad A(\omega_2) \quad \ldots \quad A(\omega_7)$$

$$FFT(B) \Rightarrow B(\omega_0) \quad B(\omega_1) \quad B(\omega_2) \quad \ldots \quad B(\omega_7)$$

$$FFT(A) \times FFT(A) = C(\omega_0) \quad C(\omega_1) \quad C(\omega_2) \quad \ldots \quad C(\omega_7)$$

$$IFFT(C(\omega)) = C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_7x^7$$

การแปลงฟูเรียร์อย่างเร็ว
(Fast Fourier Transform)