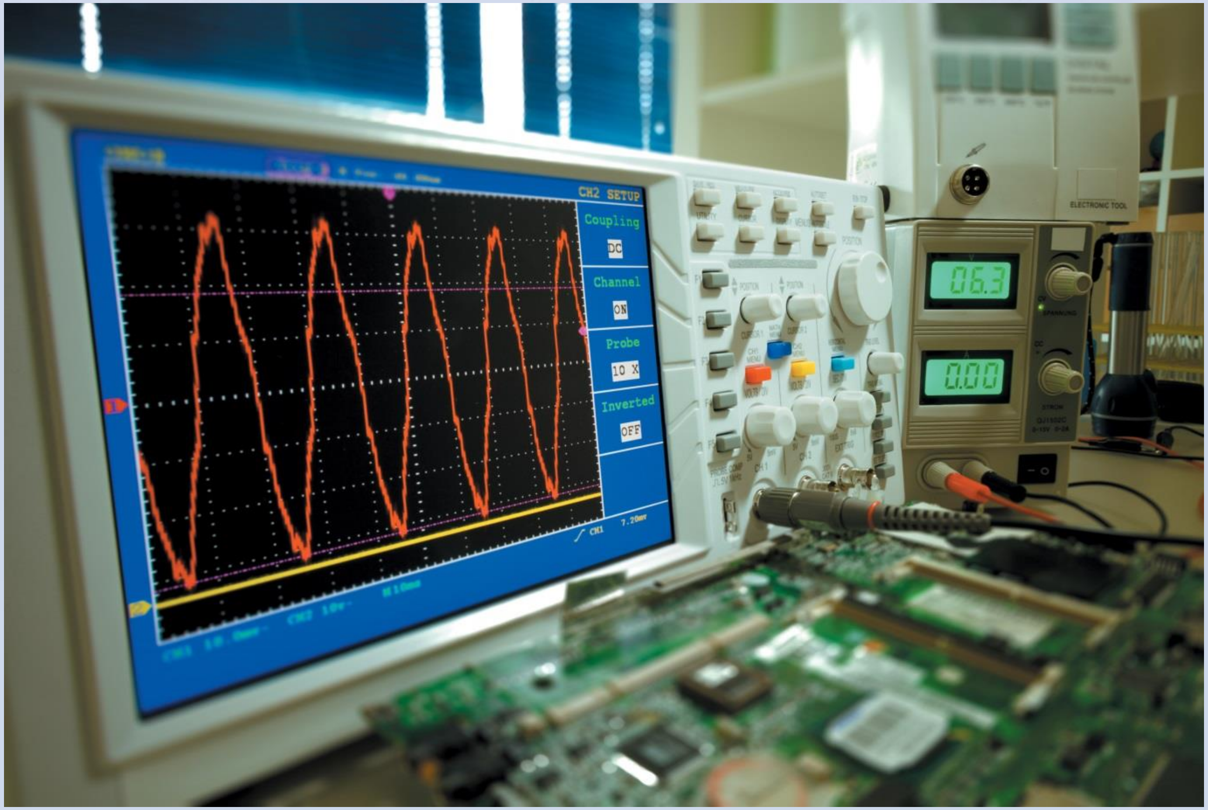
Engineering Math 2 (12026003)



Lecture 6 (Orthogonal Functions and Fourier Series)

Dr. Santhad Chuwongin

Outline

12.1 ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Functions)

12.2 อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

12.3 อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์ (Fourier Cosine and Sine Series)

12.4 อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series)

12.5 อนุกรมเบสเซลและเลอช็องดร์ (Bessel and Legendre Series)

ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Functions)

- ผลคูณภายใน (Inner product) ของเว็คเตอร์ u และ v คือสเกลาร์ ถูกนิยามโดย

$$(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{u}_1\mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{v}_2 + \mathrm{u}_3\mathrm{v}_3 = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{u}_k\mathrm{v}_k$$

- คุณสมบัติของผลคูณภายใน

$(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\mathrm{v}, \mathrm{u})$

$(k\mathrm{u}, \mathrm{v}) = k(\mathrm{u}, \mathrm{v})$, โดยที่ k คือสเกลาร์

ถ้า $\mathrm{u} = 0, (\mathrm{u}, \mathrm{u}) = 0$ และ ถ้า $\mathrm{u} \neq 0, (\mathrm{u}, \mathrm{u}) > 0$

$(\mathrm{u} + \mathrm{v}, \mathrm{w}) = (\mathrm{u}, \mathrm{w}) + (\mathrm{v}, \mathrm{w})$

ฟังก์ชันตั้งฉาก หรือ ออโธโกนอลฟังก์ชัน (Orthogonal Functions)

- ผลคูณภายใน (inner product) ของฟังก์ชัน บนช่วง $[a, b]$ คือ

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx$$

- ถ้าผลคูณภายในเท่ากับ 0 แล้วเว็คเตอร์หรือฟังก์ชันทั้งสอง จะตั้งฉากกัน (orthogonal)
- ถ้า $(f_1, f_2) = 0$ แล้ว $f_1 \perp f_2$
- ตัวอย่าง: ฟังก์ชันตั้งฉากกัน

$f_1 = x^2$ และ $f_2 = x^3$ ตั้งฉากกันบน $[-1,1]$ หรือไม่ ?

$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3\, dx = \frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = 0$ $\therefore$ ฟังก์ชันจะตั้งฉากกัน

ฟังก์ชันตั้งฉาก หรือ ออโธโกนอลฟังก์ชัน (Orthogonal Functions)

- เซ็ทของฟังก์ชันค่าจริง $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x),...\}$จะถูกเรียกว่าตั้งฉากกัน บนช่วง $[a, b]$ ถ้า $(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$ โดยที่ $m \neq n$
- นอร์ม, หรือความยาวของเว็คเตอร์ u จะถูกแสดงโดย $\|u\| = \sqrt{(u.u)}$
- นอร์มของฟังก์ชัน ϕ_n ในเซ็ทตั้งฉาก $\{\phi_n(\mathbf{x})\}$ บนช่วง $[a, b]$ เท่ากับ

$$\|\phi_n(\mathbf{x})\| = \sqrt{\int_a^b {\phi_n}^2(x)dx}$$

ฟังก์ชันตั้งฉาก หรือ ออโธโกนอลฟังก์ชัน (Orthogonal Functions)

- การกระจายของอนุกรมตั้งฉาก (orthogonal series expansion) ของฟังก์ชัน f หรืออนุกรมฟูเรียร์รูปทั่วไปของ f (generalized Fourier series) เท่ากับ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$\text{โดยที่ },\ c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\|\phi_n{}^2(x)\|} = \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n{}^2(x)\|}$$

ด้วยผลคูณภายใน สัญลักษณ์ $f(x)$ กลายเป็น

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n{}^2(x)\|} \phi_n(x)$$

ฟังก์ชันตั้งฉาก หรือ ออโธโกนอลฟังก์ชัน (Orthogonal Functions)

- อนุกรมฟูเรียร์รูปทั่วไปของ f (generalized Fourier series) เท่ากับ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$f(x)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi(x) = c_n {\phi_n}^2(x)$$

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = c_n \int_a^b {\phi_n}^2(x) = c_n \|{\phi_n}^2(x)\|$$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx}{\|{\phi_n}^2(x)\|} = \frac{(f, \phi_n)}{\|{\phi_n}^2(x)\|}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)f

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series) ของฟังก์ชัน f ในช่วง $(-p, p)$ เป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p})$$

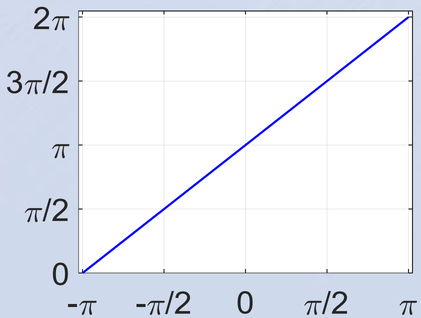
โดยที่

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



<u>**ตัวอย่าง:**</u> $f(x) = x + \pi, \ -\pi < x < \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx = \frac{1}{\pi}(2\pi^2) = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

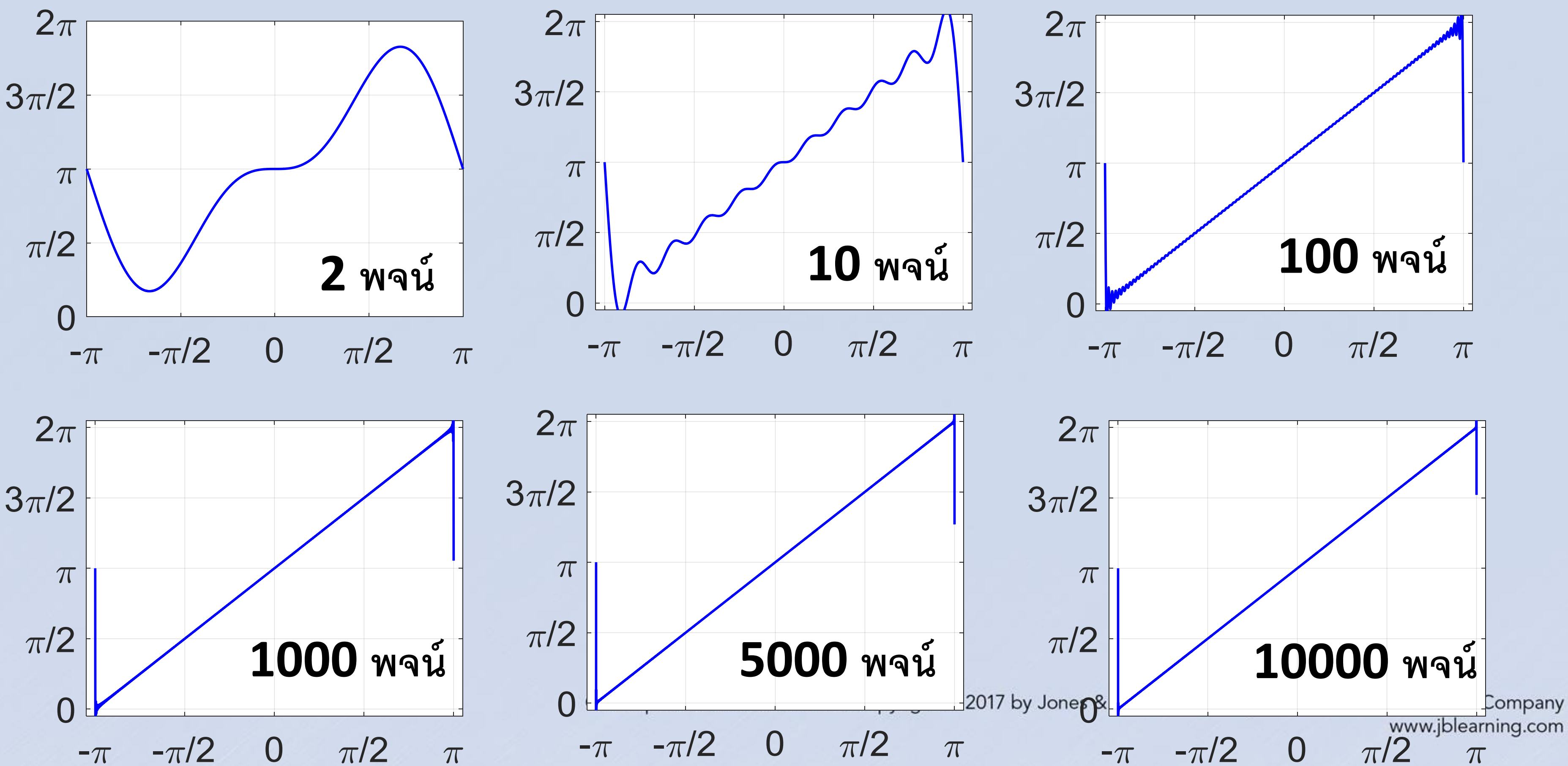
$$= -\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)$$

$$= -\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$= \pi + 2\left(1\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)$$



อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

<u>ผลพลอยได้จากอนุกรมฟูเรียร์</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{p})$$

$$= \pi + 2(1\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots)$$

<u>ที่ตำแหน่ง</u> $x = \frac{\pi}{2}, f(x) = \frac{3\pi}{2}$

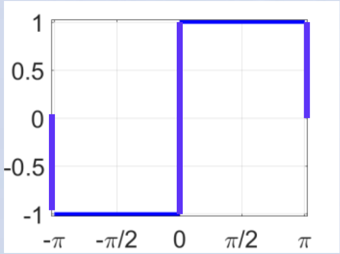
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} = \pi + 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\dots\right)$$

Gregory–Leibniz series : $\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\dots\right)$

Parsevals's identity : $\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

$$2\pi^2 + 4(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots) = \frac{8\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{6} = (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots)}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



<u>**ตัวอย่าง:**</u> $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$$

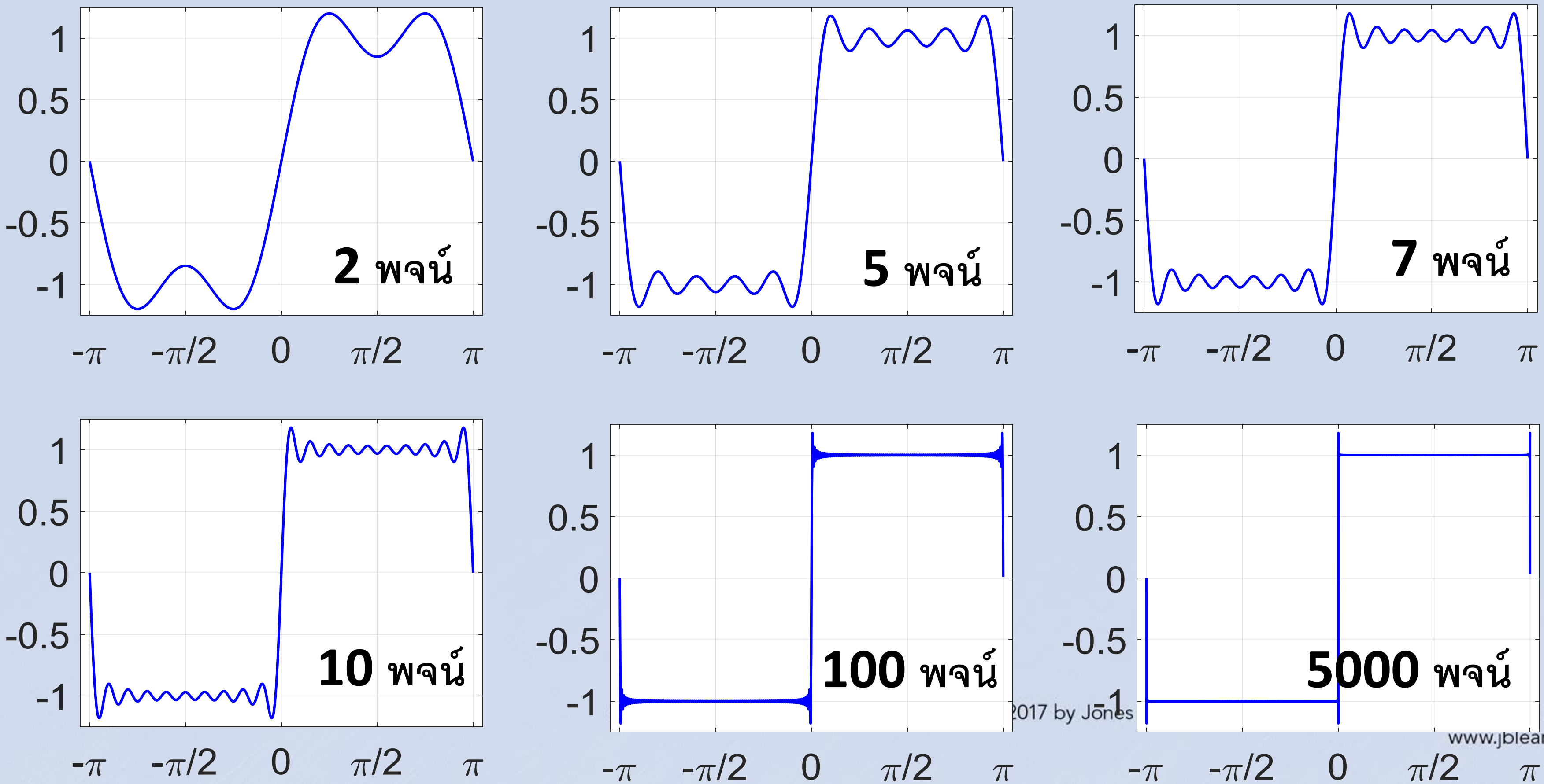
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{4}{\pi}\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \frac{1}{9}, 0, \dots\right)$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots\right)$$



อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

<u>ผลพลอยได้จากอนุกรมฟูเรียร์</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx)$$

$$= \frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots)$$

<u>ที่ตำแหน่ง</u> $x = \frac{\pi}{2}, f(x) = 1$

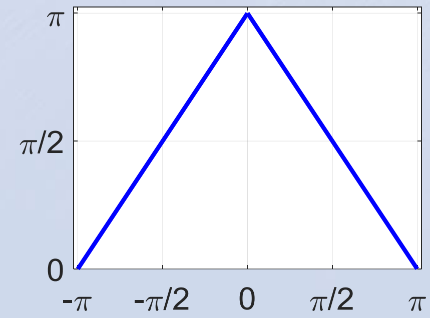
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots)$$

Gregory–Leibniz series : $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \ldots\right)}$

Parsevals's identity : $\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

$$\frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots) = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{8} = (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots)}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



ตัวอย่าง: $$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0 \\ -x+\pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\cos nx\,dx$$

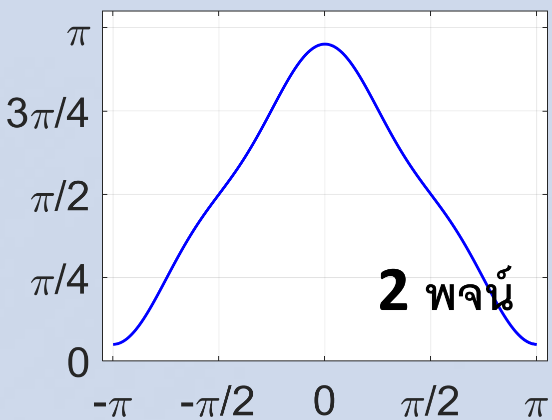
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^2} + \frac{1-\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi n^2} = \frac{4}{\pi}\left(1,0,\frac{1}{3^2},0,\frac{1}{5^2},0,\frac{1}{7^2},\ldots\right)$$

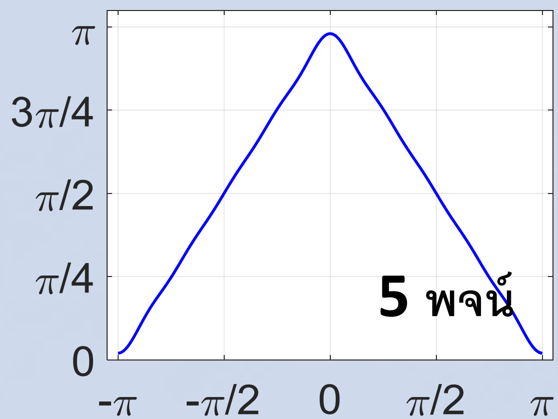
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+5)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+5)\sin nx\,dx = 0$$

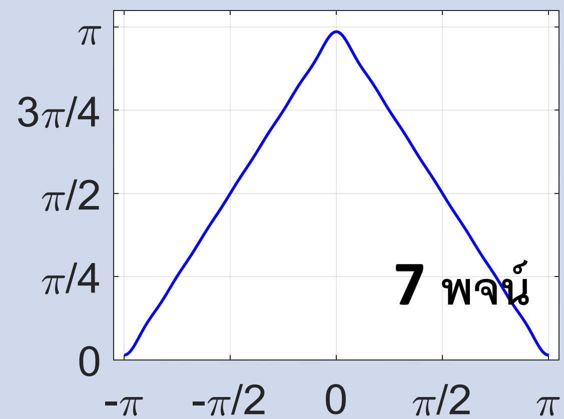
อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

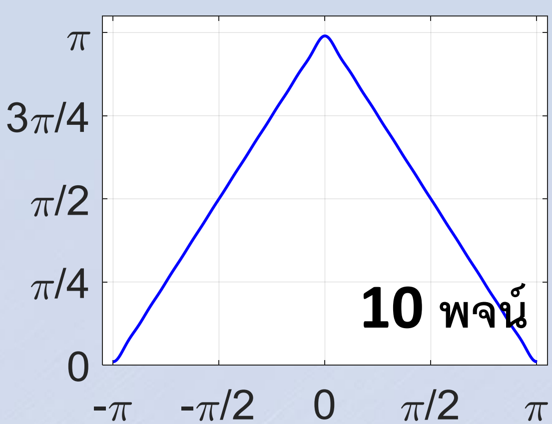
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi n^2}\right)\cos nx)$$

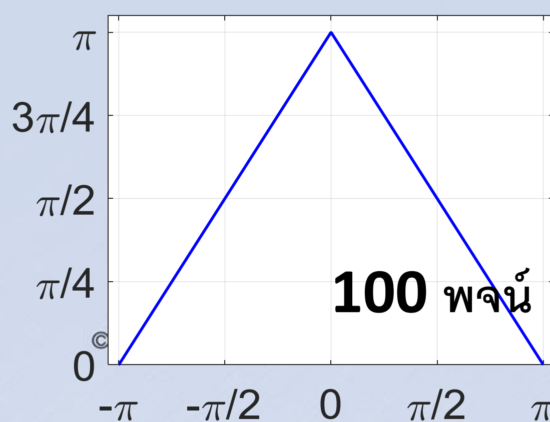
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \frac{\cos 9x}{9^2} + \cdots\right)$$











อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

ผลพลอยได้จากอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-\cos n\pi)}{\pi n^2}\right)\cos nx)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \frac{\cos 9x}{9^2} + \cdots)$$

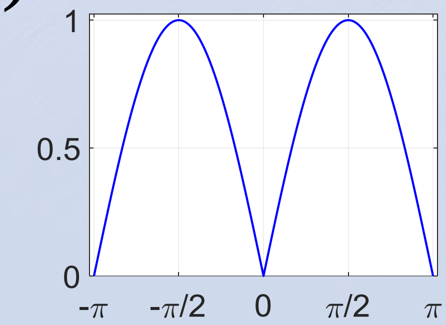
ที่ตำแหน่ง $x = \pi, f(x) = 0$

$$f(\pi) = 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(-1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$$

Parsevals's identity : $\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right) = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^4}{96} = \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right)}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



ตัวอย่าง: $f(x) = |\sin x|, -\pi < x < \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}$$

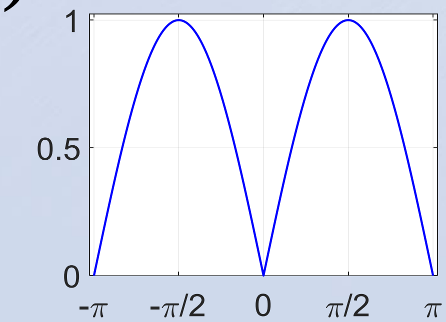
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\ \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\{\cos(x+nx) - \cos(x-nx)\}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\{\cos(x-nx) - \cos(x+nx)\}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} - \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



<u>**ตัวอย่าง:**</u> $f(x) = |\sin x|\,, -\pi < x < \pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -\{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}+\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\{\cos(\pi)\cos(n\pi)-\sin(\pi)\sin(n\pi)\}}{1+n}+\frac{1-\{\cos(\pi)\cos(n\pi)+\sin(\pi)\sin(n\pi)\}}{1-n}\right\}$$

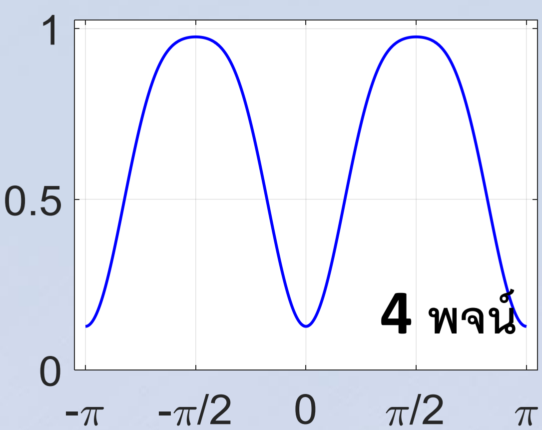
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos(n\pi)}{1+n}+\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1+(-1)^2}{1-n^2}\right\}$$

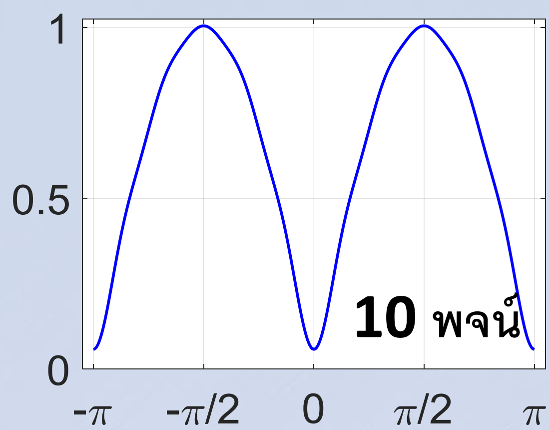
$$= -\frac{4}{\pi}\left(0,\frac{1}{3\times 1},0,\frac{1}{5\times 3},0,\frac{1}{7\times 5},0,\frac{1}{9\times 7},\ldots\right)$$

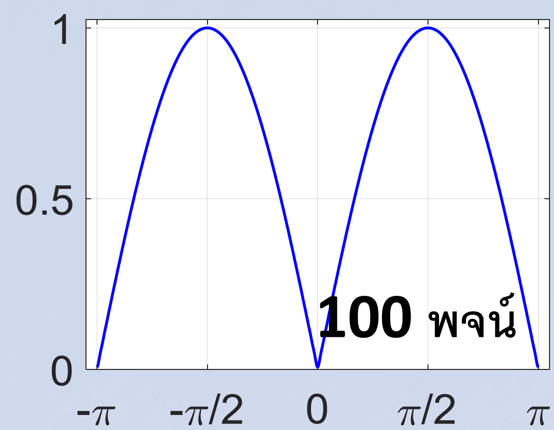
อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right\}\cos nx)$$

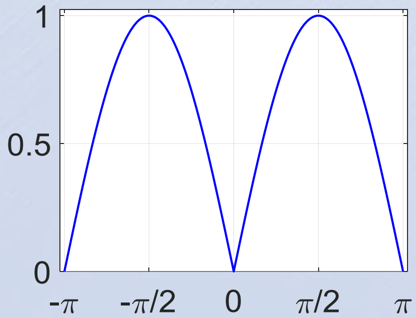
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{\cos 2x}{3\times 1} + \frac{\cos 4x}{5\times 3} + \frac{\cos 6x}{7\times 5} + \frac{\cos 8x}{9\times 7} + \frac{\cos 10x}{11\times 9} + \cdots)$$







อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



<u>ผลพลอยได้จากอนุกรมฟูเรียร์</u>

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}\right\}\cos nx)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3\times 1}+\frac{\cos 4x}{5\times 3}+\frac{\cos 6x}{7\times 5}+\frac{\cos 8x}{9\times 7}+\cdots\right)$$

<u>ที่ตำแหน่ง</u> $x=0, f(x)=0$

$$f(0)=0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3\times 1}+\frac{\cos 4x}{5\times 3}+\frac{\cos 6x}{7\times 5}+\frac{\cos 8x}{9\times 7}+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\cdots\right)$$

Parsevals's identty : $\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2+{b_n}^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

$$\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots\right)=1\Rightarrow\boxed{\frac{\pi^2-8}{16}=\left(\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots\right)}$$

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

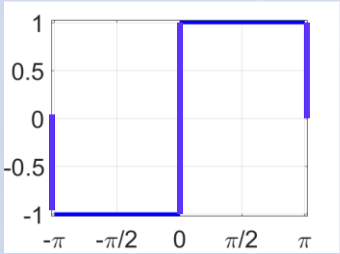
- เงื่อนไขสำหรับการลู่เข้า โดยที่ f และ f' ต่อเนื่องบนช่วง $(-\mathrm{p},\mathrm{p})$

- อนุกรมของ f ลู่เข้า $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ที่จุดของความต่อเนื่อง

- ที่จุดไม่ต่อเนื่อง, อนุกรมฟูเรียร์ จะลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ย $= \dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{x}^{+})+\mathrm{f}(\mathrm{x}^{-})}{2}$

โดยที่ $\mathrm{f}(\mathrm{x}^{+})$ และ $\mathrm{f}(\mathrm{x}^{-})$ คือลิมิตของ f ที่ x จากขวาไปซ้าย ตามลำดับ

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)



ตัวอย่าง: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx)$$

$$= \frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots)$$

ที่ตำแหน่ง $x = 0, f(x) = \frac{-1+1}{2} = 0$

$$f(0) = 0 = \frac{4}{\pi}(0 - 0 + 0 - 0 + 0 + \cdots)$$

อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์
(Fourier Cosine and Sine Series)

- ฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันคู่ (even) ถ้า $\mathbf{f(-x) = f(x)}$
  - ➢ ฟังก์ชันจะสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน y บนช่วง $(-\mathrm{p}, \mathrm{p})$
- ฟังก์ชัน $\mathbf{f}$ เป็นฟังก์ชันคี่ (odd) ถ้า $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$
  - ➢ ฟังก์ชันจะสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิด บนช่วง $(-\mathrm{p}, \mathrm{p})$

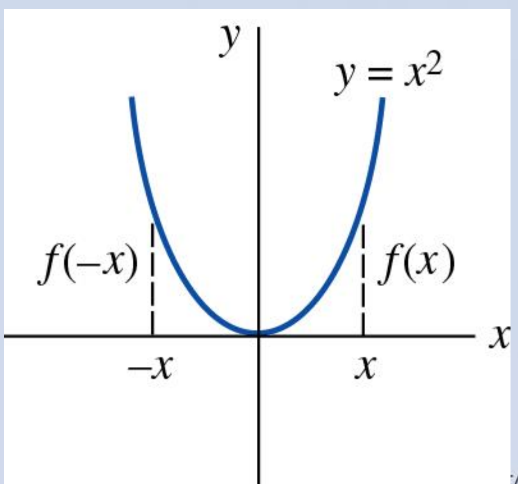


Figure 12.3.1: Even function

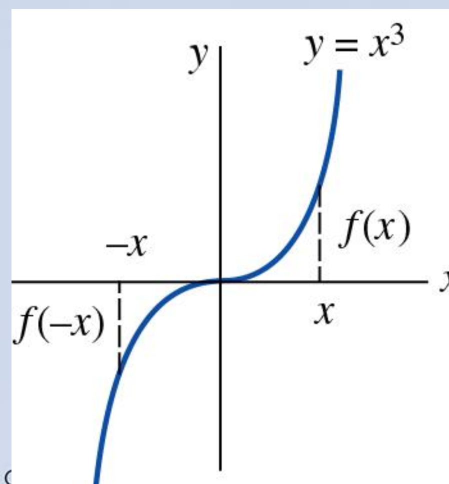


Figure 12.3.2: Odd function

อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์

(Fourier Cosine and Sine Series)

Theorem 12.3.1 Properties of Even/Odd Functions

(a) The product of two even functions is even.
(b) The product of two odd functions is even.
(c) The product of an even function and an odd function is odd.
(d) The sum (difference) of two even functions is even.
(e) The sum (difference) of two odd functions is odd.
(f) $\boxed{\text{If } f \text{ is even, then } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.}$
(g) $\boxed{\text{If } f \text{ is odd, then } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.}$

- อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคู่ บนช่วง $(-p, p)$ คือ อนุกรมโคไซน์ (cosine series)
- อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคี่ บนช่วง $(-p, p)$ คือ อนุกรมไซน์ (sine series)

อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์

(Fourier Cosine and Sine Series)

- อนุกรมโคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

- อนุกรมไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์
(Fourier Cosine and Sine Series)

- ถ้าเราสนใจฟังก์ชันที่ถูกนิยามบนช่วง $(0, L)$ แทนที่จะเป็น $(-p, p)$ เราอาจจะหานิยามที่กำหนดเองของ f บนช่วง $(-L, 0)$ โดยอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนี้:

  i. สะท้อนกราฟของฟังก์ชันรอบแกน y ไปยัง $(-L, 0)$ ดังนั้น ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันคู่ บนช่วง $(-L, L)$

  ii. สะท้อนกราฟของฟังก์ชันผ่านจุดกำเนิด ไปยัง $(-L, 0)$ ดังนั้น ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันคี่ บนช่วง $(-L, L)$, หรือ

  iii. กำหนด f บนช่วง$(-L, 0)$ โดย $f(x) = f(x + L)$

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series)

- ในการประยุกต์ใช้งานบางครั้ง การแทน f ด้วยอนุกรมอนันต์ในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อนจะง่ายกว่า เช่น ในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

$$e^{inx}, \text{ โดยที่ } n = 0,1,2, \ldots$$

- ทบทวนสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\boxed{e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \quad , \quad e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx}$$

- ผลนี้สามารถใช้เขียนอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อน หรือ ในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series)

- อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนของฟังก์ชัน f ถูกนิยามบนช่วง $(-p, p)$ เท่ากับ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p}$$

โดยที่

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\, e^{-in\pi x/p} dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- ถ้า f เป็นไปตามสมมติฐานของทฤษฎีการลู่เข้า, อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนลู่เข้าหา $f(x)$ ที่จุดต่อเนื่องและ ลู่เข้าหาค่าเฉลี่ยที่จุดไม่ต่อเนื่อง

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi} dx, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi} dx$$

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2} - ib_n \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/p} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/p}\right)$$

$$\boxed{= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\pi x/p} + c_{-n}e^{-in\pi x/p}\right)} \quad \boxed{= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n e^{in\pi x/p}\right)} \quad \boxed{c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\, e^{-in\pi x/p} dx}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน (Complex Fourier Series)

<u>**ตัวอย่าง:**</u> $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

1. Identifying $p = 2$ we have

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)e^{-in\pi x/2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}(-1)e^{-in\pi x/2}\,dx + \int_{0}^{2} e^{-in\pi x/2}\,dx\right]$$

$$= \frac{i}{2n\pi}\left[-1 + e^{in\pi} + e^{-in\pi} - 1\right] = \frac{i}{2n\pi}\left[-1 + (-1)^n + (-1)^n - 1\right] = \frac{1-(-1)^n}{n\pi i}$$

and

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.$$

Thus

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{in\pi x/2}.$$

อนุกรมเบสเซลและเลอช็องดร์

(Bessel and Legendre Series)

- สำหรับค่าคงที่ n เซ็ทของเบสเซลฟังก์ชัน $\{J_n(\alpha_i x)\}, i = 1,2,3,\ldots$ จะตั้งฉากเมื่อเทียบกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) บนช่วง $[0, b]$ เมื่อ α_i ถูกนิยามโดยเงื่อนไขขอบเขตในรูปแบบดังนี้

$$A_2 J_n(\alpha b) + B_2 \alpha J_n{}'(\alpha b) = 0$$

- อนุกรมฟูเรียร์รูปทั่วไปของเซ็ทที่ตั้งฉากนี้คือ

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha b) = 0$$

โดยที่

$$c_i = \frac{\int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x) dx}{\|J_n(\alpha_i x)\|^2}$$

อนุกรมเบสเซลและเลอช็องดร์

(Bessel and Legendre Series)

- 3 รูปแบบของอนุกรมสัมพันธ์กับ 3 กรณีของเงื่อนไขขอบเขต

Definition 12.6.1 Fourier–Bessel Series

The **Fourier–Bessel series** of a function f defined on the interval $(0, b)$ is given by

(*i*)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{15}$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{16}$$

where the α_i are defined by $J_n(\alpha b) = 0$.

(*ii*)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{17}$$

$$c_i = \frac{2\alpha_i^2}{(\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{18}$$

where the α_i are defined by $hJ_n(\alpha b) + \alpha b J_n'(\alpha b) = 0$.

(*iii*)
$$f(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\alpha_i x) \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{2}{b^2} \int_0^b x f(x)\, dx, \quad c_i = \frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_0(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{20}$$

where the α_i are defined by $J_0'(\alpha b) = 0$.

อนุกรมเบสเซลและเลอช็องดร์
(Bessel and Legendre Series)

- กำลังสองนอร์มของพหุนาม $P_n(x)$ (polynomial) ขึ้นอยู่กับ n ในลักษณะตามนี้

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} {P_n}^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

- อนุกรมฟูเรียร์-เลอช็องดร์ของฟังก์ชัน fถูกนิยามบนช่วง$(-\mathbf{1},\mathbf{1})$ ดังนี้

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n\,P_n(x) = 0$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)dx$$

อนุกรมเบสเซลและเลอช็องดร์
(Bessel and Legendre Series)

- อนุกรมฟูเรียร์-เบสเซล และอนุกรมฟูเรียร์- เลอช็องดร์มีเงื่อนไขสำหรับการลู่เข้าเหมือนกันกับอนุกรมฟูเรียร์
- เบสเซลฟังก์ชัน และพหุนามเลอช็องดร์เป็นฟังก์ชันในโปรแกรมคอมพิวเตอร์พีชคณิต เช่น Maple และ Mathematica