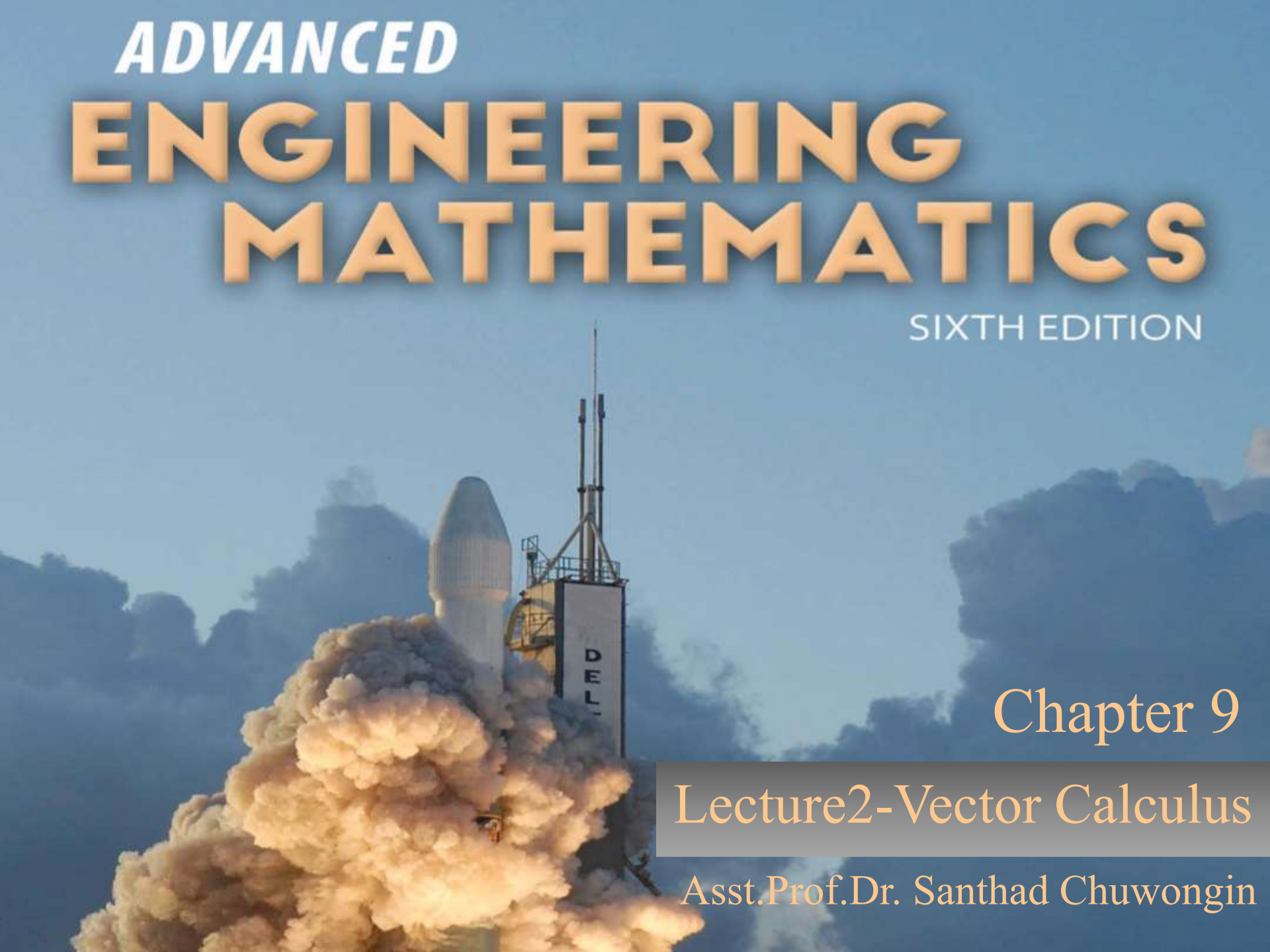


A photograph of a Space Shuttle Challenger launching, with a large plume of white smoke and orange fire at the base, set against a blue sky with scattered clouds.

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

SIXTH EDITION

Chapter 9

Lecture2-Vector Calculus

Asst.Prof.Dr. Santhad Chuwongin

Double Integrals (อินทิกรัลสองชั้น)

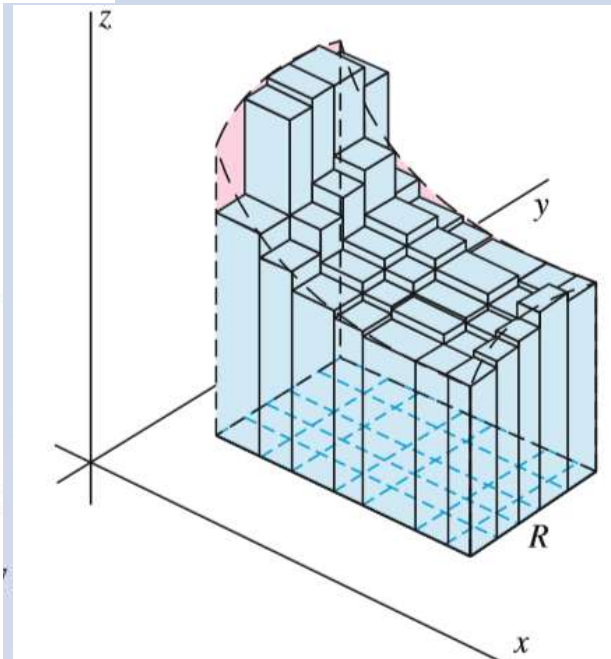
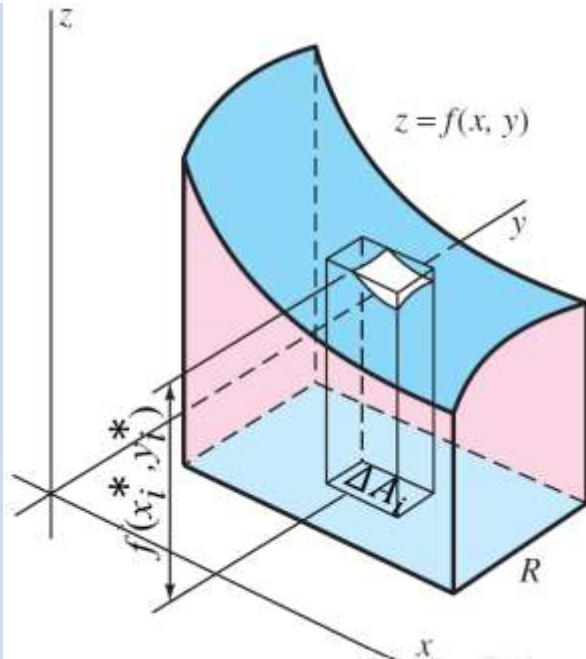
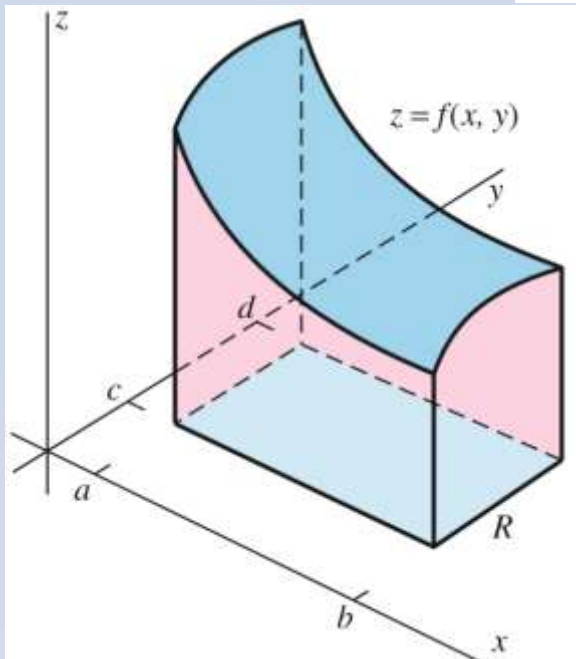
Definition 9.10.1 The Double Integral

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรอยู่เหนือบริเวณ R ใดๆใน 2 มิติ ดังรูป ดังนั้นอินทิกรัลสองชั้นของ f เหนือบริเวณ R มีค่าเท่ากับ

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i$$

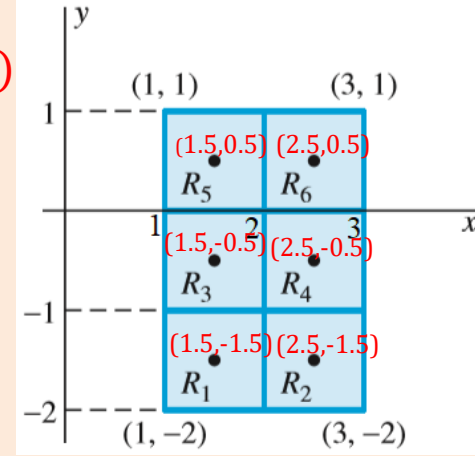
เมื่อ $\|P\|$ ของ partition P เข้าใกล้ศูนย์

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



ตัวอย่าง จงประมาณค่า Double integral $\iint_R (4x^3 + 6xy^2) dA$ เหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R (ระนาบ XY) ดังรูปด้านขวามือ $(\iint_R f(x,y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i)$

$$\iint_R (4x^3 + 6xy^2) dA \cong \sum_{i=1}^n (4x_i^3 + 6x_i y_i^2) \Delta A_i$$



Number of Subrectangles	Midpoint Approximation
6	294.00
24	307.50
96	310.88
384	311.72
1536	311.93
6144	311.98

$$\iint_R (4x^3 + 6xy^2) dA = \int_{-2}^1 \int_1^3 (4x^3 + 6xy^2) dx dy$$

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda x, y: 4 * x**3 + 6 * x * y**2
integrate.dblquad(f, -2, 1, 1, 3)
```

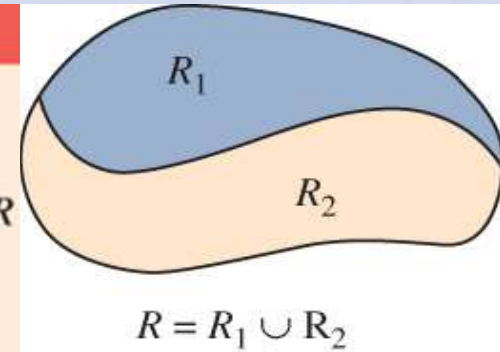
Properties of Double Integrals

Theorem 9.10.1 Properties of Double Integrals

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสองตัวแปร และสามารถอินทิเกรตได้เหนือบริเวณ R ดังนั้น

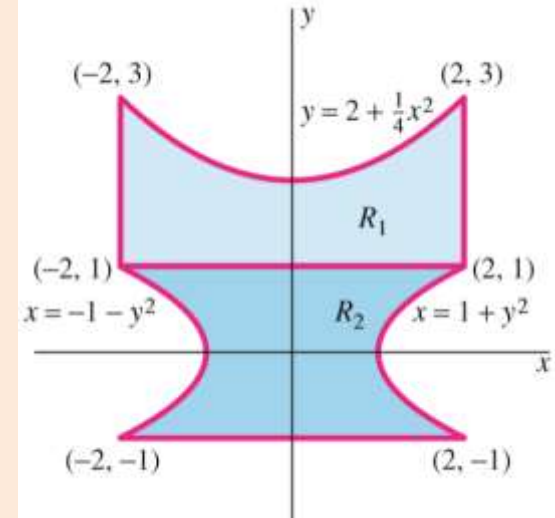
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA, \text{ where } R_1 \text{ and } R_2 \text{ are subregions of } R$$

that do not overlap and $R = R_1 \cup R_2$.



ตัวอย่าง จงหาค่า $\iint_R (x + 1) dA$ เหนือบริเวณ R ดังรูปด้านขวามือ

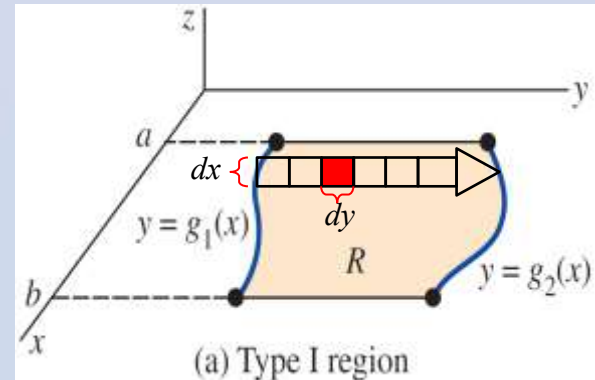
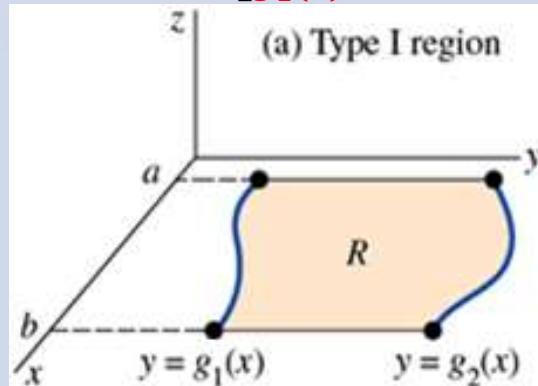
$$\iint_R (x + 1) dA = \iint_{R_1} (x + 1) dA + \iint_{R_2} (x + 1) dA$$



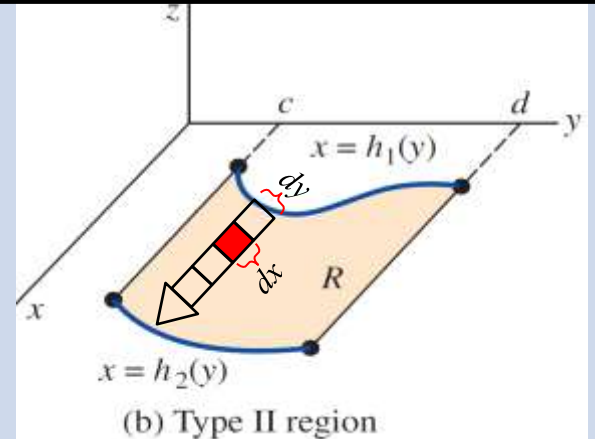
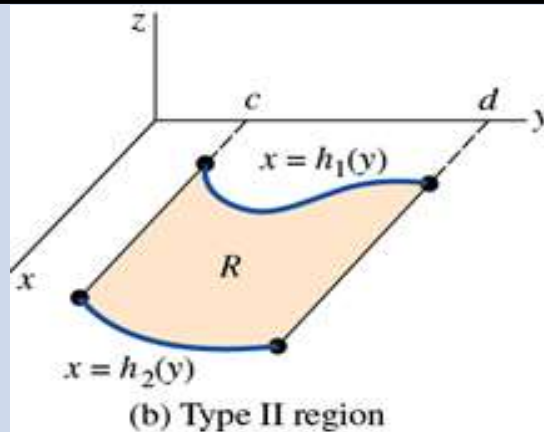
Double Integrals (อินทิกรัลสองชั้น)

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Type I



Type II

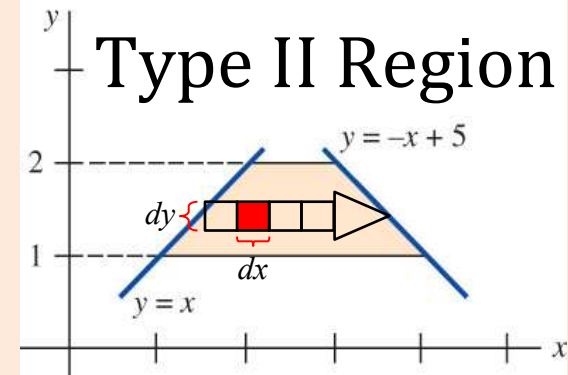


$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่า Double integral $\iint_R e^{x+3y} dA$

เหนือบริเวณที่ถูกจำกัดโดยกราฟ $y = 1, y = 2, y = x$ และ $y = -x + 5$

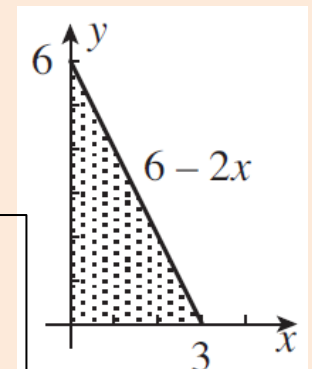
$$\iint_R e^{x+3y} dA$$



```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
sp.integrate(sp.integrate(sp.exp(x+3*y), (x, y, 5-y)), (y, 1, 2)).evalf()
```

2. จงหาค่าปริมาตรของรูปทรงที่ถูกล้อมรอบด้วยกราฟต่อไปนี้ $2x + y + z = 6, x=0, y=0, z=0$, first octant

$$\iint_R (6 - 2x - y) dy dx = \int_0^3 \int_0^{6-2x} (6 - 2x - y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (6 - 2x)^2 dx = \frac{-(6 - 2x)^3}{12} \Big|_0^3 = 18$$



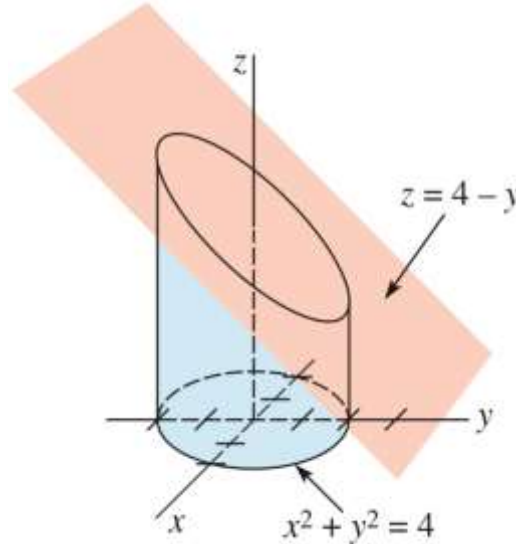
```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
sp.integrate(sp.integrate(6-2*x-y, (y, 0, 6-2*x)), (x, 0, 3)).evalf()
```


ตัวอย่าง พิจารณาขอบเขตที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - y$ และ $z = 0$
 ดังรูป จงหาปริมาตรที่ถูกปิดล้อม

(a) $4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx$

(b) $2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx$

(c) $2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy$



$$V = 2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy$$

$$= 2 \int_{-2}^2 (4-y)x \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= 2 \int_{-2}^2 (4-y)\sqrt{4-y^2} dy$$

$$= 2 \left[2y\sqrt{4-y^2} + 8 \sin^{-1} \frac{y}{2} + \frac{1}{3}(4-y^2)^{3/2} \right] \Big|_{-2}^2 = 2(4\pi - (-4\pi)) = 16\pi$$

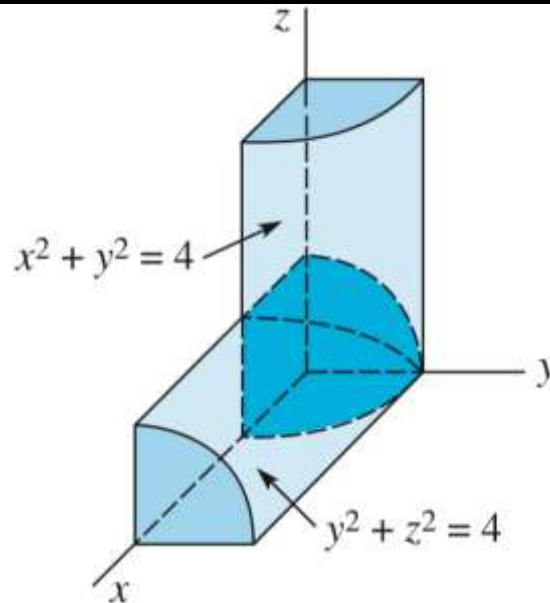
```
import scipy.integrate as spi
import numpy as np
sol, _ = spi.dblquad(lambda x, y: 4 - y, -2, 2,
                    lambda y: -np.sqrt(4 - y**2),
                    lambda y: np.sqrt(4 - y**2))
print(sol)
```

ตัวอย่าง พิจารณาขอบเขตที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x^2 + y^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$ ดังรูป จงหาปริมาตรที่ถูกปิดล้อม

(a)
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)^{1/2} dy dx$$

(b)
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2} dx dy$$

(c)
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2)^{1/2} dy dx$$



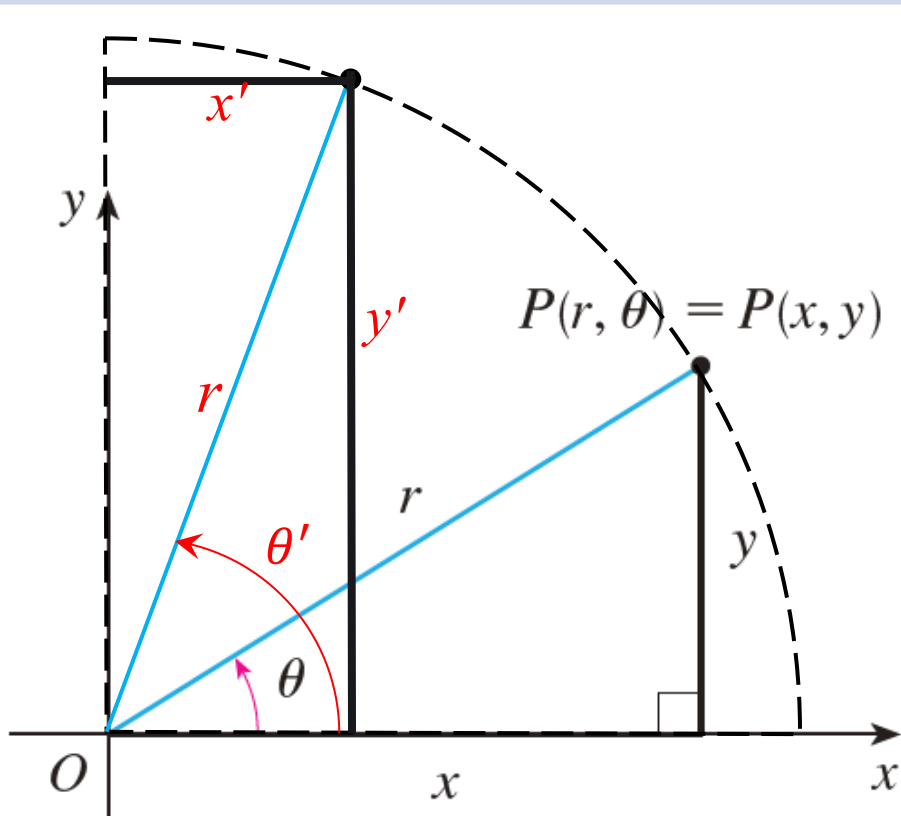
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2} dx dy = \int_0^2 (4 - y^2)^{1/2} x \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left(4y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

```
import scipy.integrate as spi
import numpy as np
spi.dblquad(lambda x, y: np.sqrt(4 - y**2), 0, 2,
            lambda y: 0,
            lambda y: np.sqrt(4 - y**2))
```


การแปลงตัวแปรจากพิกัดฉากไปพิกัดเชิงขั้ว

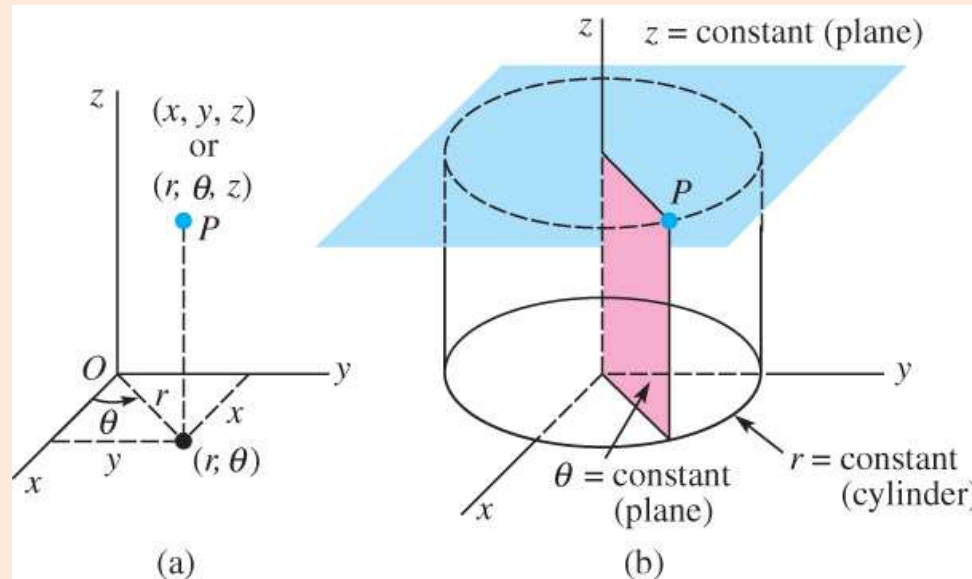
(Change of Variables: Rectangular to Polar Coordinates)

- Polar coordinates (r, θ) of a point are related to the rectangular coordinates (x, y) by the equations



Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

Cylindrical coordinate system เป็นการรวม พิกัดขั้ว (polar) ของจุดบนระนาบ xy กับพิกัดฉากเฉพาะแกน z ดังแสดงในรูป พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) ของจุด P ถูกแสดงโดย (r, θ, z)



การแปลงพิกัดทรงกระบอก $\Rightarrow$ พิกัดฉาก

จากรูปด้านบน พิกัดฉาก (x, y, z) ของจุด P สามารถหาได้จากพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

การแปลงพิกัดฉาก $\Rightarrow$ พิกัดทรงกระบอก

พิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็น พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) โดย

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}, z = z$$

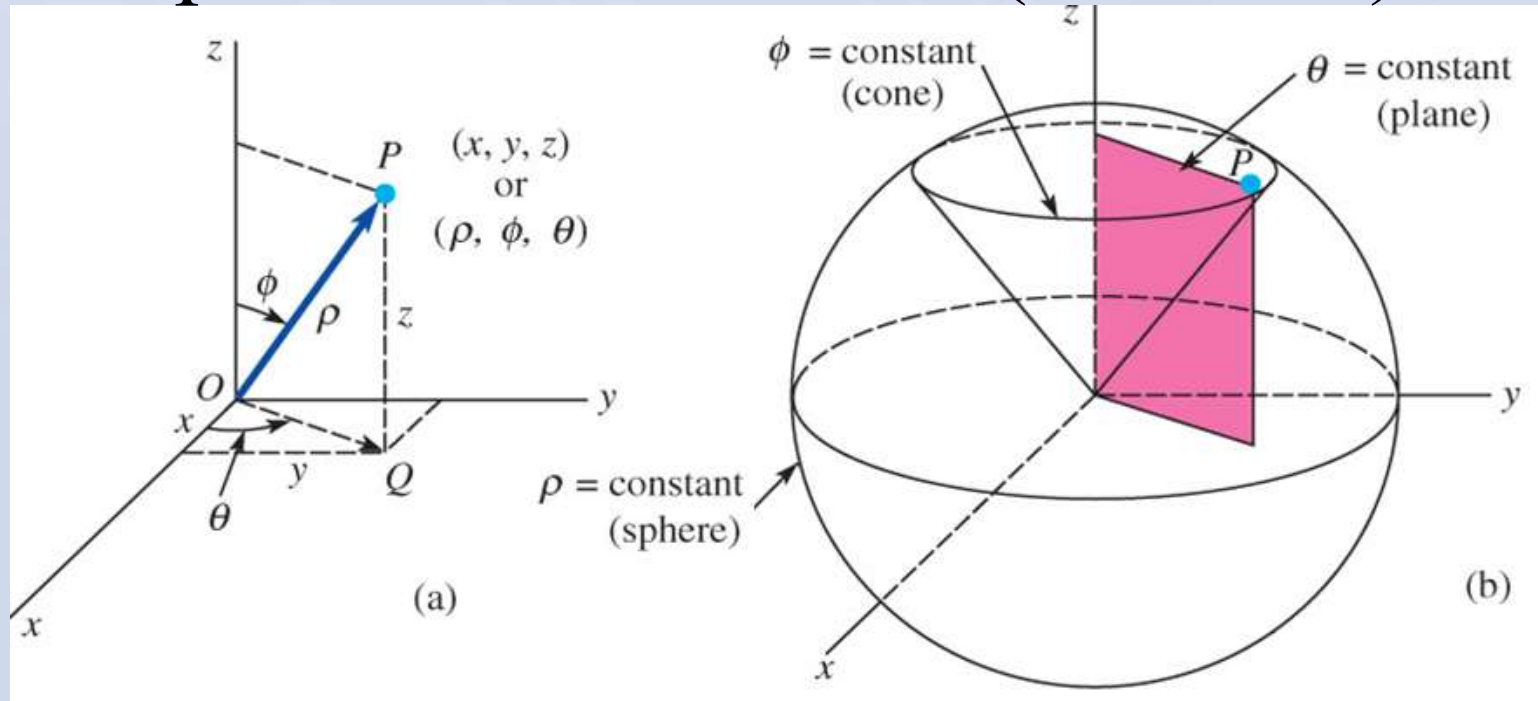
Cylindrical Coordinates (พิกัดทรงกระบอก)

ตัวอย่าง

จงแปลง $\left(8, \frac{\pi}{3}, 7\right) = (r, \theta, z)$ พิกัดทรงกระบอก $\Rightarrow (x, y, z)$ พิกัดฉาก

ดังนั้น $\left(8, \frac{\pi}{3}, 7\right) \Rightarrow \left(\underbrace{4}_{r \cos \theta}, \underbrace{4\sqrt{3}}_{r \sin \theta}, \underbrace{7}_z\right)$ ในพิกัดฉาก

Spherical Coordinates (พิกัดทรงกลม)



การแปลงพิกัดทรงกลม $\Rightarrow$ พิกัดฉาก

พิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) แปลงไปเป็น พิกัดฉาก (x, y, z) โดย

$x = \|\overrightarrow{OQ}\| \cos \theta$, $y = \|\overrightarrow{OQ}\| \sin \theta$, $z = \|\overrightarrow{OP}\| \cos \phi$ และจากรูป $\|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \sin \phi$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$$

การแปลงพิกัดฉาก $\Rightarrow$ พิกัดทรงกลม

พิกัดพิกัดฉาก (x, y, z) แปลงไปเป็นทรงกลม (ρ, ϕ, θ) โดย

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Spherical Coordinates)

จากรูป ปริมาตรรูปสี่เหลี่ยมในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) ประมาณค่าได้เป็น

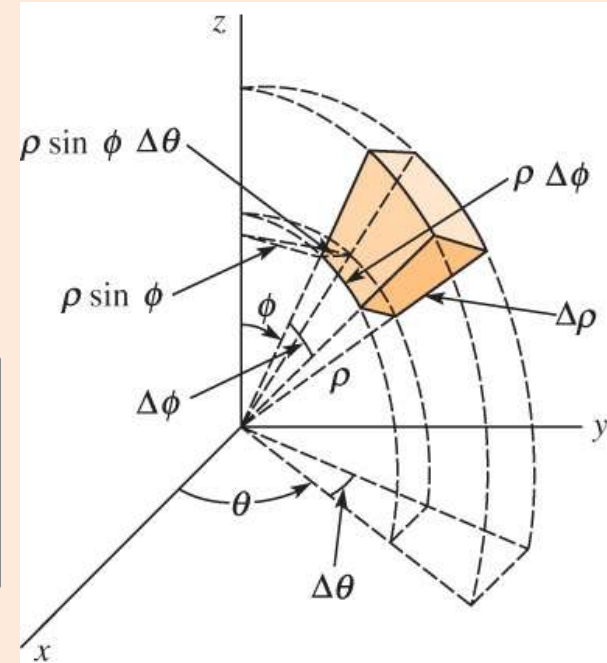
$$dV = W \times L \times H = d\rho \times \rho d\phi \times \rho \sin \phi d\theta = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

โดยทั่วไป การอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม จะอยู่ในรูป

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi, \theta)}^{f_2(\phi, \theta)} F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรทรงกลม} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^r \right) \left(-\cos \phi \Big|_0^{\pi} \right) \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{r^3}{3} \times 2 \times 2\pi \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$



Converting Coordinates (การแปลงพิกัด)

ตัวอย่าง

จงแปลง $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) = (\rho, \phi, \theta)$ พิกัดทรงกลม $\Rightarrow$ พิกัดฉาก (x, y, z)

และ พิกัดทรงกลม $\Rightarrow$ พิกัดทรงกระบอก (r, θ, z)

$$\rho = 6, \phi = \frac{\pi}{4}, \text{ และ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

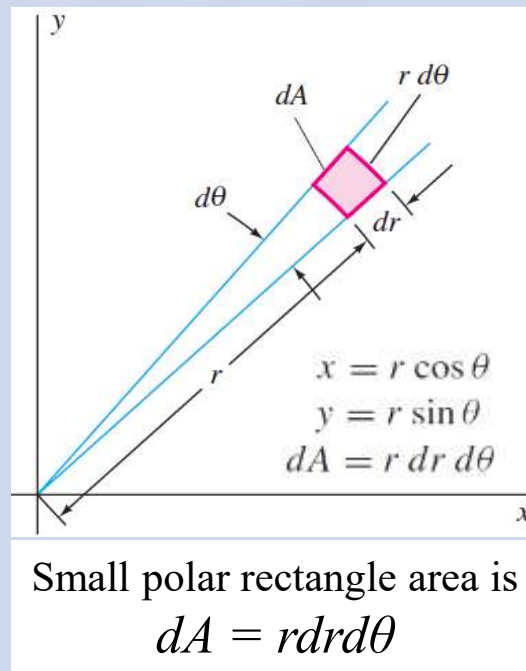
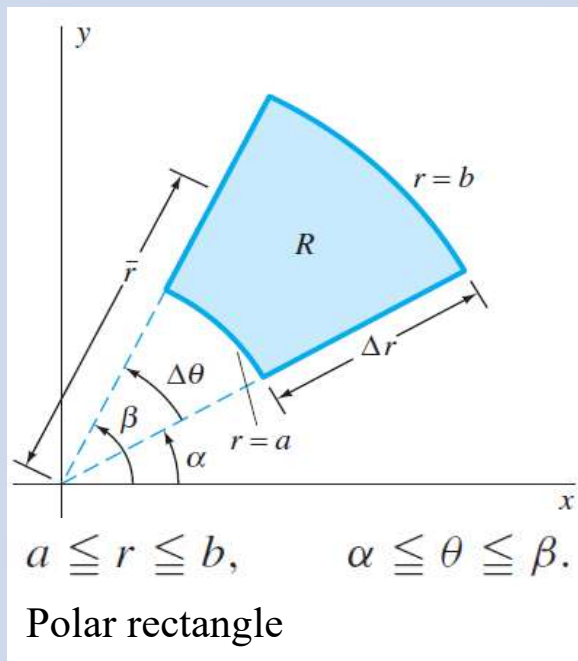
ดังนั้น $(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3\sqrt{2} \right)$ ในพิกัดฉาก

$(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow (3\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, 3\sqrt{2})$ ในพิกัดทรงกระบอก

Double Integrals in Polar Coordinates

(อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว)

Double integral may be easier to evaluate (Transform rectangular xy -co. into polar $r\theta$ -co.)



Change of Variables: Rectangular to Polar Coordinates

(การเปลี่ยนตัวแปรจากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดเชิงขั้ว)

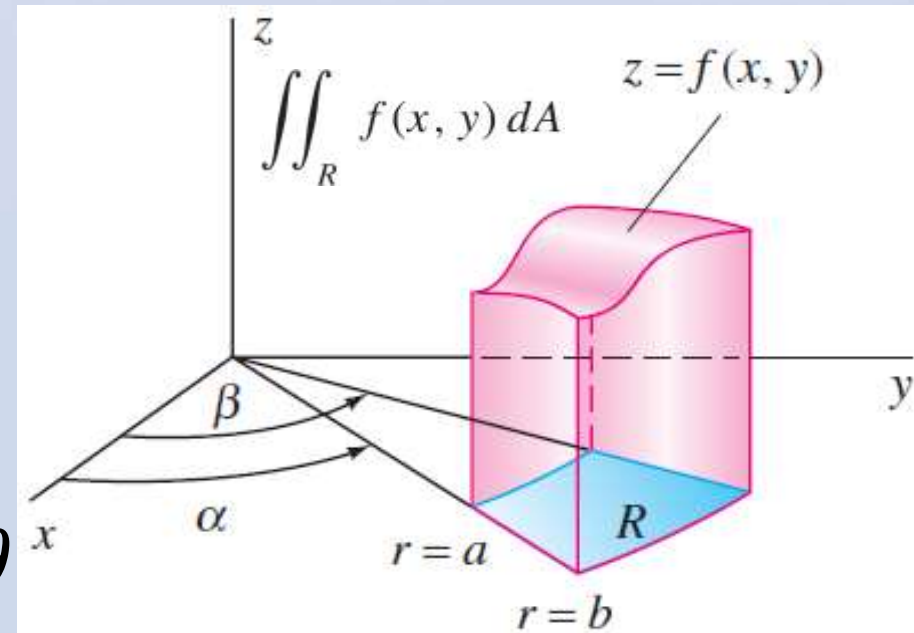
- In polar coordinates as

$$0 \leq a \leq r \leq b$$

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Solid region whose base is the polar rectangle R

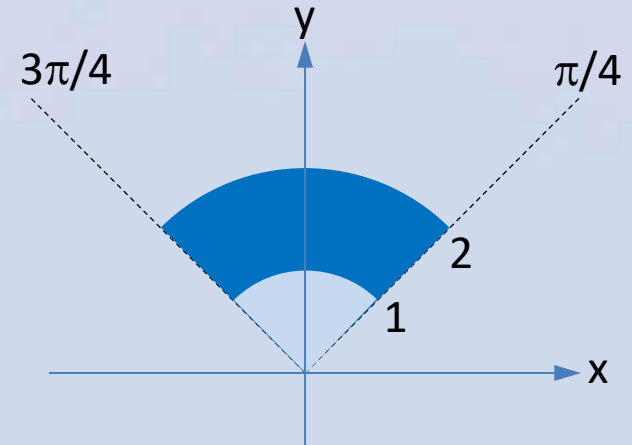
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Double Integrals in Polar Coordinates

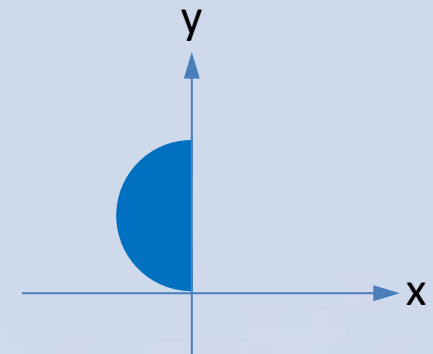
(อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว)

EXAMPLE จงหาค่าอินทิกรัล และวาดบริเวณพื้นที่ของอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r dr d\theta$$

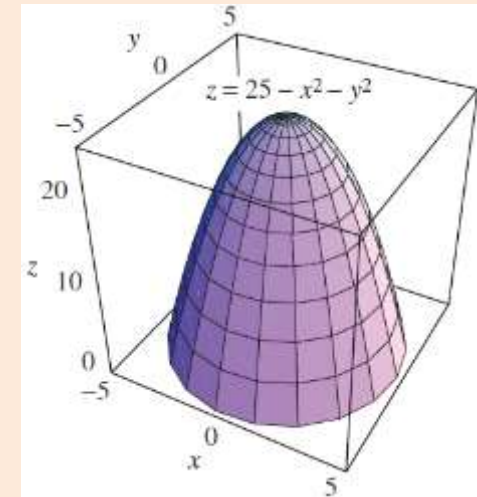


$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\sin(\theta)} r dr d\theta$$



ตัวอย่าง จงหาปริมาตร V ของรูปที่กำหนดให้โดยมีขอบเขตเป็นระนาบ xy และพาราโบลา $z = 25 - x^2 - y^2$

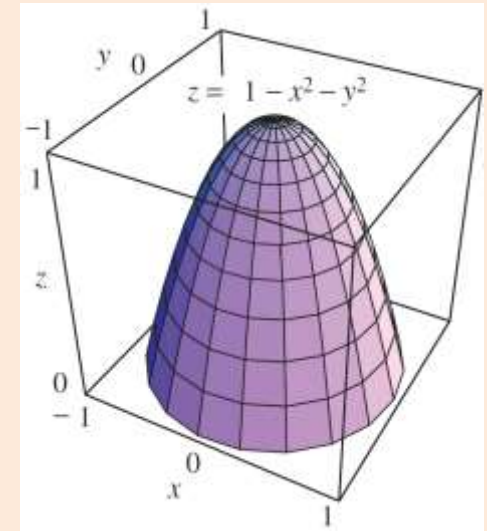
$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2=25} (25 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (5^2 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[25 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^5 \right) d\theta = \frac{625\pi}{2} \end{aligned}$$



```
import scipy.integrate as spi, numpy as np
spi.dblquad(lambda x, y: 25 - x**2 - y**2, -5, 5,
             lambda y: -np.sqrt(25 - y**2),
             lambda y: np.sqrt(25 - y**2))
```

ตัวอย่าง จงหาค่า $\iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} (1 - x^2 - y^2) dx dy$

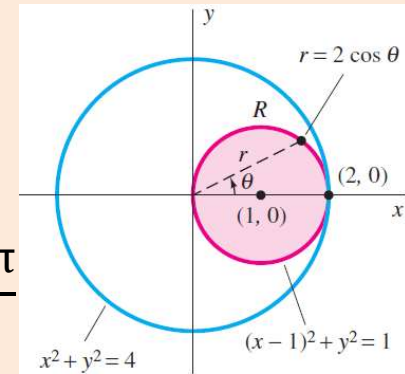
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$



```
import scipy.integrate as spi
import numpy as np
spi.dblquad(lambda x,y:1-x**2-y**2,0,1,lambda y:0,lambda y:np.sqrt(1-y**2))
```

ตัวอย่าง จงหาปริมาตร V ของ **solid region** ที่อยู่ภายในทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และ ทรงกระบอก $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R f(x, y) dx dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta \\
 &= -2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \sqrt{4-r^2} d(4-r^2) d\theta = -2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3} (4-r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^{2\cos(\theta)} d\theta \\
 &= -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8(1-\cos^2\theta)^{3/2} - 8) d\theta = -\frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1) d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \int_1^0 (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) + \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{3} \left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{16\pi}{3} \\
 &= \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9} \approx 9.644
 \end{aligned}$$

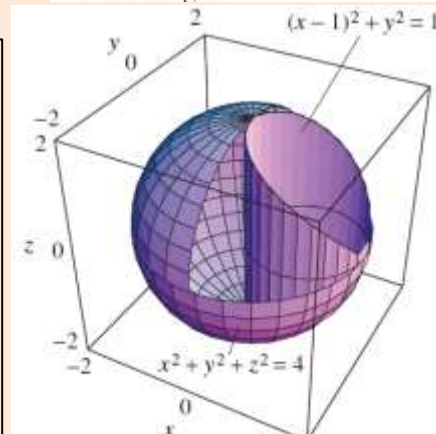


The small circle is the domain R of the integral

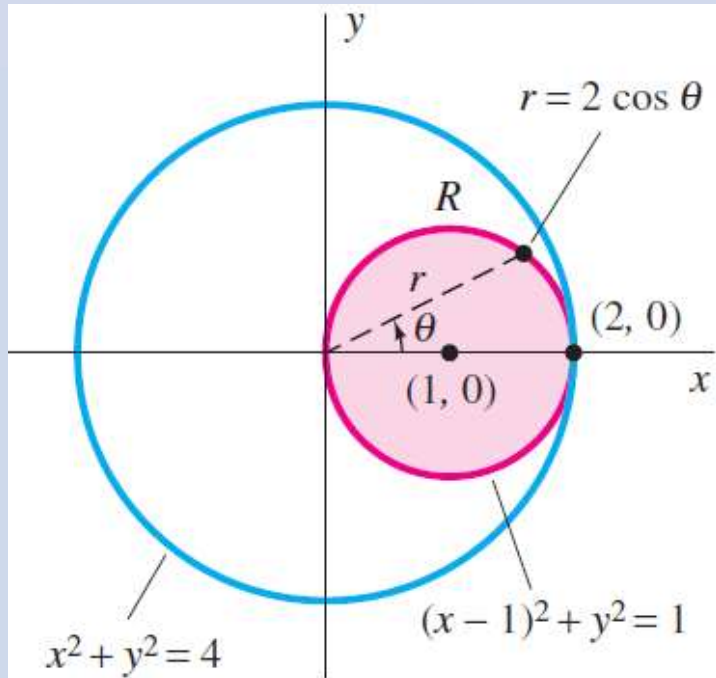
```

import scipy.integrate as spi
import numpy as np
result, error = spi.dblquad(
    lambda x, y: np.sqrt(4 - x**2 - y**2), # Integrand function
    -1, 1, # Limits for x
    lambda y: 1 - np.sqrt(1 - y**2), # Lower limit for y
    lambda y: 1 + np.sqrt(1 - y**2) # Upper limit for y)
final_result = 2 * result
print("Final result:" final_result)

```



Why $r = 2\cos(\theta)$?



The small circle is the domain R of the integral

$$(x - 1)^2 + y^2 = r^2 = 1$$

We use the polar coordinate transformations:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Substituting into the given equation:

$$(r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + 1 + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

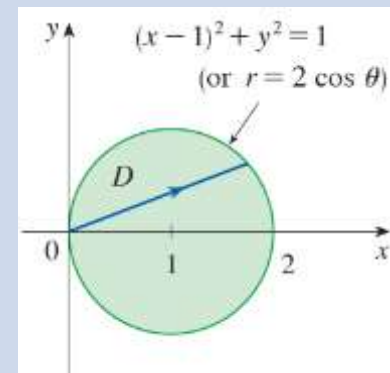
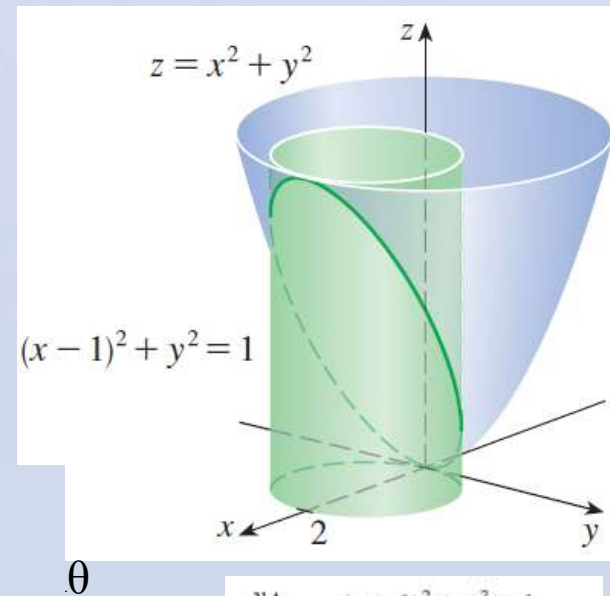
$$r^2 - 2r \cos \theta = 0$$

$$r(r - 2 \cos \theta) = 0$$

$$r = 2 \cos \theta$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตร V ของ solid region ดังรูปซึ่งอยู่ใต้ paraboloid $z = x^2 + y^2$
 เหนือระนาบ xy และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2x$

$$V = \iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} r^2 r dr d\theta$$



ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัลเหล่านี้โดยแปลงตัวแปรเป็นพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates)

$$\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spi
spi.dblquad(lambda x,y: np.sqrt(x**2+y**2),-3,3,0,lambda x: np.sqrt(9-x**2))
```

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spi
spi.dblquad(lambda x,y: np.exp(x**2+y**2),0,1,0,lambda y: np.sqrt(1-y**2))
```

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi-x^2}} \sin(x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spi
spi.dblquad(lambda x,y: np.sin(x**2+y**2),-np.sqrt(np.pi),np.sqrt(np.pi),0,lambda x: np.sqrt(np.pi-x**2))
```

ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัลเหล่านี้โดยแปลงตัวแปรเป็นพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates)

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

```
from sympy import symbols, sqrt, integrate
x, y = symbols('x y')
fun = y**2 / (sqrt(x**2 + y**2))
xmax = sqrt(1 - y**2) ; xmin = y
integrate(integrate(fun, (x,xmin,xmax)), (y,0,sqrt(2)/2)).evalf()
```

$$\int_{-5}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y) dy dx$$

```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def fun(y, x):# Define the function to integrate
    return 4*x + 3*y
def ymax(x):# Define the upper limit for y
    return np.sqrt(25 - x**2)
dblquad(fun, -5, 5, lambda x: 0, ymax)# Compute the double integral
```

จงหาค่าอินทิกรัลเหล่านี้โดยแปลงตัวแปรเป็นพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates)

EXAMPLE Evaluate $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, where R is the region in the upper half-plane bounded by the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$.

```
from sympy import symbols, sqrt, integrate
x, y = symbols('x y')
fun = 3*x + 4*y**2
ymax = sqrt(4 - x**2) ; ymin = sqrt(1 - x**2)

s1= integrate(integrate(fun, (y,0,ymax)), (x,-2,2))
s2= integrate(integrate(fun, (y,0,ymin)), (x,-1,1))
sol = s1 - s2
print("Integral result:", sol)
```

```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
# Define the function
def f(r, theta):
    return r * (3 * np.cos(theta) + 4 * (r * np.sin(theta)) ** 2)

# Compute the double integral
sol= dblquad(f, 0, np.pi, 1, 2)
# Print result
print("Integral result:", sol)
```

ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัล $\iint_R (x + y) dA$ ทับบริเวณ R ดังรูป

$$\iint_R (x + y) dA$$

$$\int -\sin^4 \theta d\theta = \int \sin^3 \theta d\cos \theta = \sin^3 \theta \cos \theta - \int \cos \theta d\sin^3 \theta = \sin^3 \theta \cos \theta - 3 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \sin^3 \theta \cos \theta - 3 \int \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \sin^3 \theta \cos \theta - 3 \int \sin^2 \theta d\theta + 3 \int \sin^4 \theta d\theta = \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \theta - \frac{3}{4} \sin 2\theta + 3 \int \sin^4 \theta d\theta$$

$$4 \int -\sin^4 \theta d\theta = \sin^3 \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \theta + \frac{3}{4} \sin 2\theta$$

$$\int -\sin^4 \theta d\theta = \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{4} - \frac{3}{8} \theta + \frac{3}{16} \sin 2\theta$$

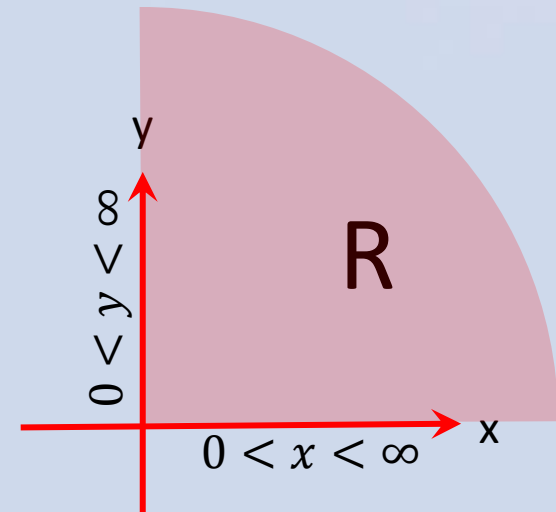
```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def fun(x, y): return x + y
def xmax(y): return np.sqrt(4 - y**2)
def xmin(y): return np.sqrt(1 - (y - 1)**2)
sol, _ = dblquad(fun, 0, 2, xmin, xmax)
print("Integral result:", sol)
```

ตัวอย่าง จงหาค่า The improper integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ ซึ่งมีความสำคัญมากในทฤษฎีความน่าจะเป็น, สถิติ และอื่นๆทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ ถ้า I แทนอินทิกรัลดังกล่าว ดังนั้น $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ และ $I = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$ ดังนั้น $I^2 = (\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx)(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ (หาค่า I^2 โดยใช้พิภคเชิงขั้ว)

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr^2 \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

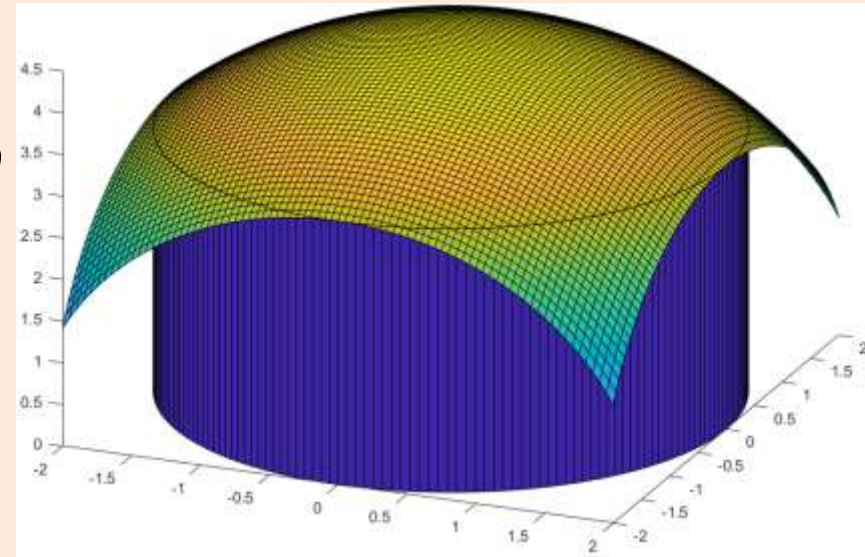
$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def fun(x, y): return np.exp(-x**2 - y**2)
sol, _ = dblquad(fun, 0, np.inf, lambda y: 0, lambda y: np.inf)
np.sqrt(sol)
```

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และรูปทรงรี (ellipsoid) $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$

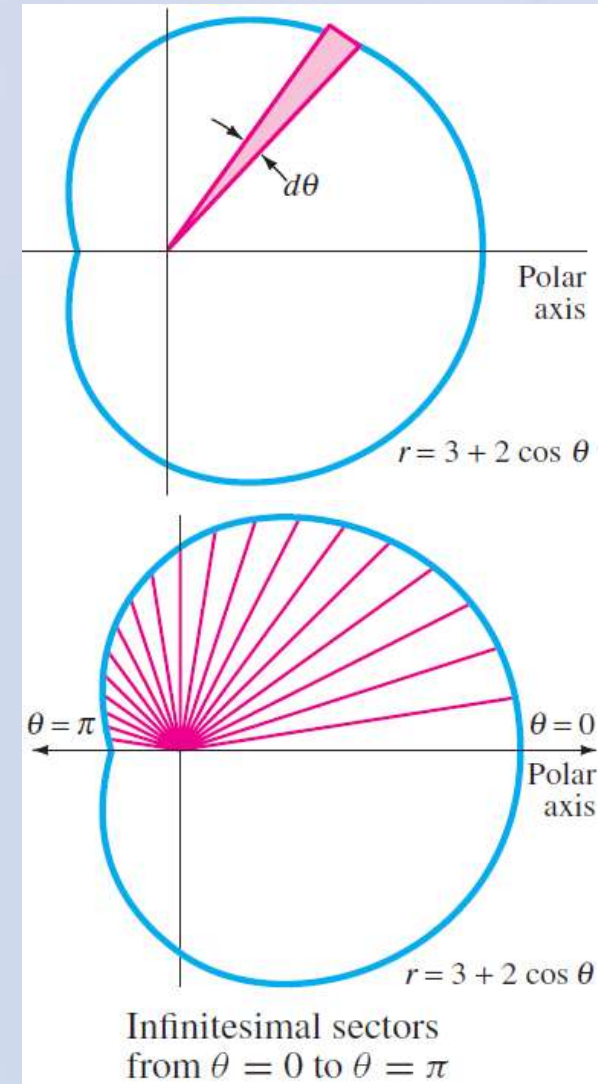
$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{18 - 2r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} (18 - 2r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= -\frac{\pi}{3} (\sqrt{1000} - \sqrt{5832}) \approx 46.86 \end{aligned}$$



```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def fun(x, y): return np.sqrt(18 - 2*x**2 - 2*y**2)
def xmin(y): return -np.sqrt(4 - y**2)
def xmax(y): return np.sqrt(4 - y**2)
sol, _ = dblquad(fun, -2, 2, xmin, xmax)
print("Integral result:", sol)
```

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ limaçon $r = 3 + 2 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$A = \iint r dr d\theta$$



```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def f(r, theta): return r
def rmax(theta): return 3 + 2 * np.cos(theta)
sol, _ = dblquad(f, 0, 2 * np.pi, lambda theta: 0, rmax)
print("Integral result:", sol)
```


ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัล $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (1-x^2-y^2) dx dy$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (1-x^2-y^2) dx dy$$

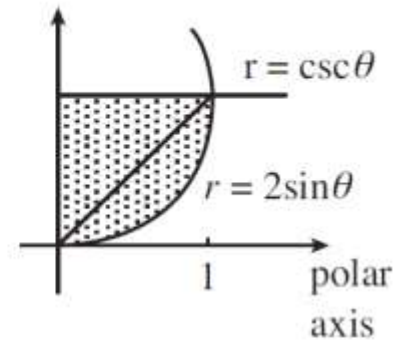
$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sin\theta} (1-r^2)r dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\csc\theta} (1-r^2)r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) \Big|_0^{\csc\theta} d\theta$$

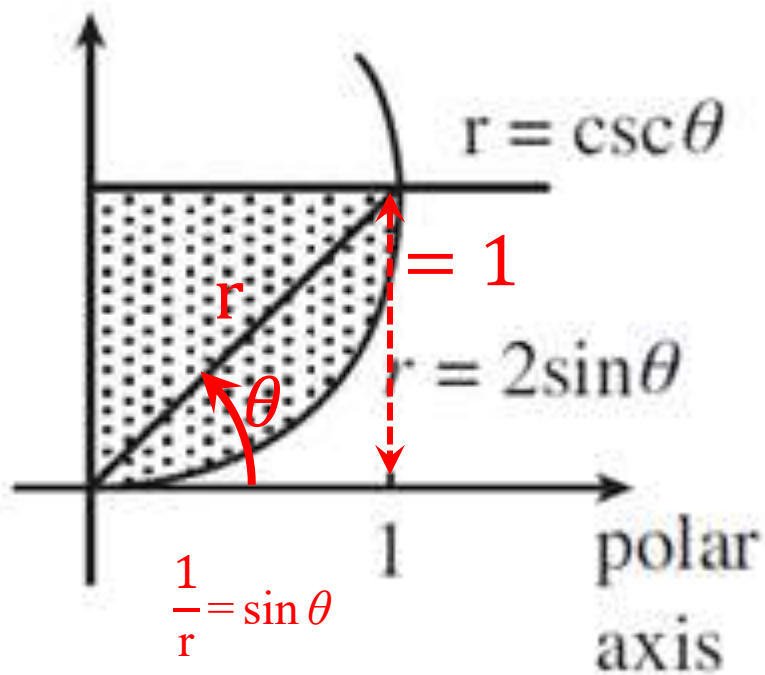
$$= \int_0^{\pi/4} (2\sin^2\theta - 4\sin^4\theta) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\csc^2\theta - \frac{1}{4}\csc^4\theta \right) d\theta$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - \left(\frac{3}{2}\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right) \right] + \left[-\frac{1}{2}\cot\theta - \frac{1}{4} \left(-\cot\theta - \frac{1}{3}\cot^3\theta \right) \right] \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \right) + \left[0 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) \right] = \frac{16-3\pi}{24}$$



```
import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad
def fun(r, theta): return r * (1 - r**2)
s1, _ = dblquad(fun, 0, np.pi/4, lambda theta: 0, lambda theta: 2 * np.sin(theta))
s2, _ = dblquad(fun, np.pi/4, np.pi/2, lambda theta: 0, lambda theta: 1 / np.sin(theta))
sol = s1 + s2
print("Integral result:", sol)
```



$$\frac{1}{\sin \theta} = r = \csc \theta$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = r^2 = 1$$

We use the polar coordinate transformations:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Substituting into the given equation:

$$r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 1)^2 = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 2r \sin \theta + 1 = 1$$

$$r^2 - 2r \sin \theta = 0$$

$$r(r - 2 \sin \theta) = 0$$

$$r = 2 \sin \theta$$