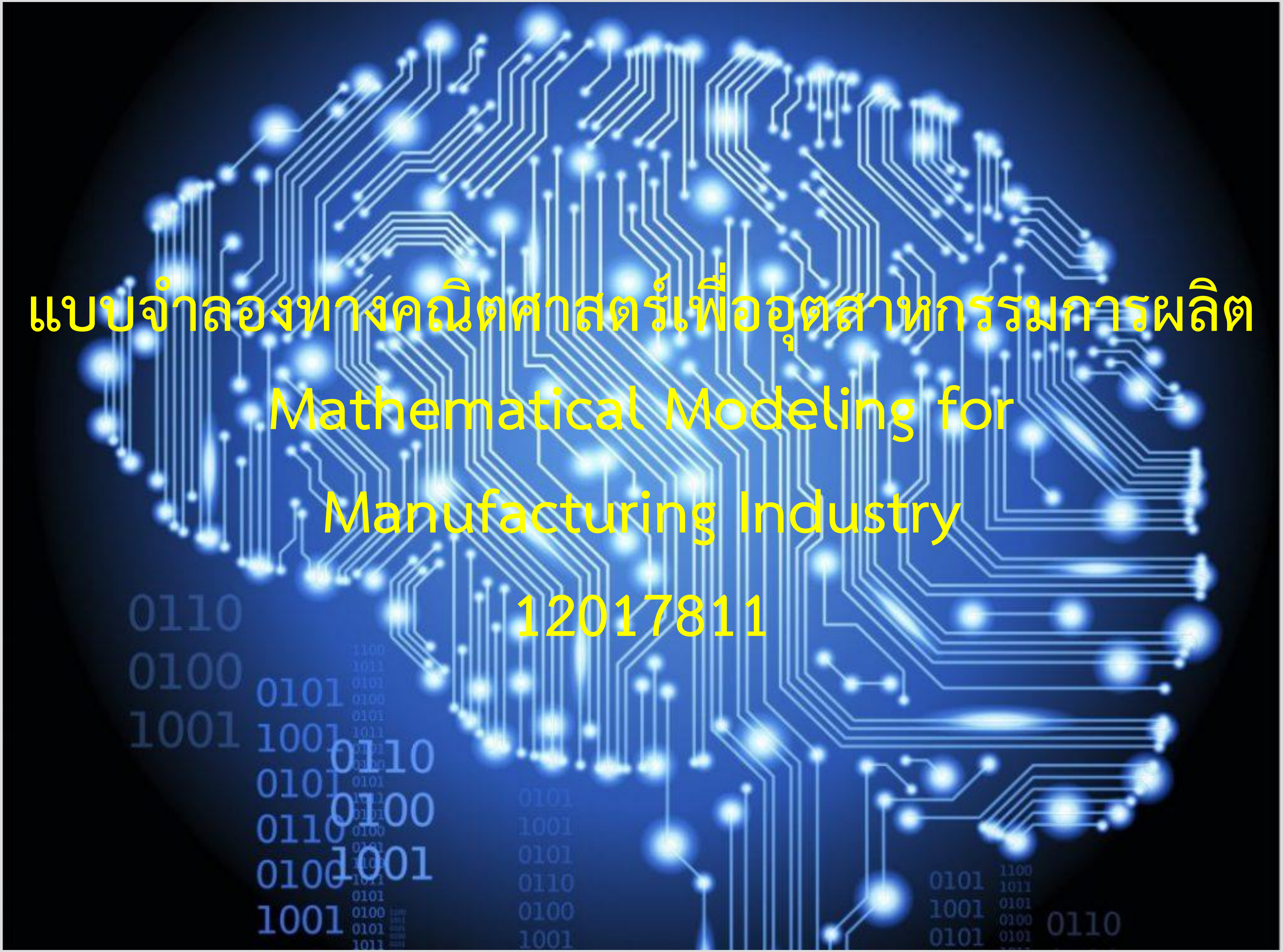


# แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออุตสาหกรรมการผลิต

# Mathematical Modeling for Manufacturing Industry

12017811

# Topics

- Textbooks:
  - ➢ Introduction to Process Control Analysis, Mathematical Modeling, Control and Optimization by Skormin, Victor A.
  - ➢ Production Systems Engineering by Jingshan Li, Semyon M. Meerkov
- Useful Material
  - ➢ Machine Learning | Coursera by Andrew Ng
  - ➢ http://ai.berkeley.edu/lecture_videos.html
- Grading :

| **Activities** | **Percentages** |
| --- | --- |
| Tests (3 times) | 30% |
| Homework | 30% |
| Project+presentation | 40% |

# Topics

- Intro to OCTAVE
- What is Mathematical Modeling?
- Random Event.
- Bayes'Theorem.
- Random Variables.
- Probability Density Function (PDF) and Normal Distribution.
- Systems of Random Variables
- Random Processes
- Essence of Linear Algebra by 3blue1brown (Youtube.com)
- http://cs231n.github.io/python-numpy-tutorial/

# What is Mathematical Modeling?

- Mathematical modeling is the art of translating problems from an application area into tractable mathematical formulations.
- It provides insight, answers, and guidance useful for the originating problem.
- Usually composed of relationships and variables.
- Relationships can be described by operators, such as algebraic operators, functions, differential operators, etc.
- Variables are abstractions of system parameters of interest.

# Random Events

- A random event is an event that may or may not occur as the result of a trial.
- Probability of a random event A, P[A], is 0<P[A]<1.
- $\frac{N^A}{N}$, N is the total number of trials, and $N^A$ is the number of trials where event A has occurred
- $P[A] = \lim_{N \to \infty} \frac{N^A}{N}$

# Random Events

- If two events A and B occur, the *conditional frequency* of event A subject to event B is the ratio $\frac{N^{AB}}{N^{B}}$, $\mathrm{N}^{\mathrm{B}}$ is total number of trials that occurrence of event B, and $\mathrm{N}^{\mathrm{AB}}$ is the number of trials that occurrence of both A and B.
- *Conditional probability* of event A subject to event B is defined as $P[A/B] = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{AB}}{N^{B}}$, $N \to \infty$ leads to $\mathrm{N}^{\mathrm{A}} \to \infty$, $\mathrm{N}^{\mathrm{B}} \to \infty$, and $\mathrm{N}^{\mathrm{AB}} \to \infty$, however $\mathrm{N}^{\mathrm{AB}} \leq \mathrm{N}^{\mathrm{A}}$, $\mathrm{N}^{\mathrm{AB}} \leq \mathrm{N}^{\mathrm{B}}$

# Random Events

- Event C, defined as a simultaneous occurrence of event A and event B, is called the product of two events

  $C = A \cdot B$

- The probability of event C or, $P[C] = P[A/B] \times P[B]$

- $P[A/B] \times P[B] = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{AB}}{N^{B}} \times \lim_{N\to\infty} \frac{N^{B}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{AB}}{N} =$

  $P[AB] = P[C]$

- Similarly,$P[C] = P[B/A] \times P[A]$

# Bayes' Theorem

- $P[A/B] \times P[B] = P[B/A] \times P[A]$

- $P[A/B] = \dfrac{P[B/A] \times P[A]}{P[B]}$ →Bayes'theorem

# Bayes’Theorem

- Example 1.1 โรงงานผลิตชิ้นส่วนรถยนต์  เก็บข้อมูลการผลิตจำนวน 5,500 ข้อมูลซึ่งมีจำนวน 879 ครั้งของความบกพร่องของชิ้นส่วนรถยนต์ถูกแสดงดังนี้:

    136 ครั้ง เกิดจาก กระแสไฟฟ้าตก

    177 ครั้ง เกิดจาก วัตถุดิบไม่ได้คุณภาพ

    83 ครั้ง เกิดจาก เครื่องจักรทำงานผิดพลาดเล็กน้อย

  ชิ้นส่วนรถยนต์ที่ถูกผลิตขึ้นแล้วได้คุณภาพดีมีเหตุการณ์ดังนี้

    36 ครั้ง เกิดจาก กระแสไฟฟ้าตก

    81 ครั้ง เกิดจาก วัตถุดิบไม่ได้คุณภาพ

    63 ครั้ง เกิดจาก เครื่องจักรทำงานผิดพลาดเล็กน้อย

จงหาความน่าจะเป็นของการผลิตชิ้นส่วนรถยนต์แล้วเกิดความบกพร่อง ถ้าเกิดกระแสไฟฟ้าตก เวลา 10 AM, และต่อจากนั้นวัตถุดิบไม่ได้คุณภาพ เวลา 2 PM

# Bayes' Theorem

- สมมุติให้ เหตุการณ์ $A_1$ คือคุณภาพบกพร่อง, เหตุการณ์ $A_2$ คือคุณภาพดี , เหตุการณ์ $B$ คือเกิดกระแสไฟฟ้าตก, เหตุการณ์ $C$ คือเกิดวัตถุดิบไม่ได้คุณภาพ

ดังนั้น $P[A_1] + P[A_2] = 1$

ความน่าจะเป็นของชิ้นส่วนคุณภาพบกพร่อง $P[A_1] = \frac{879}{5500} = 0.16$

ความน่าจะเป็นของชิ้นส่วนคุณภาพดี $P[A_2] = \frac{(5500-879)}{5500} = 0.84$

$$P[B/A_1] = \frac{N^{BA_1}}{N^{A_1}} = \frac{136}{879} = 0.155$$

$$P[B/A_2] = \frac{N^{BA_2}}{N^{A_2}} = \frac{36}{5500-879} = 0.008$$

เราสามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการเกิดความบกพร่องในการผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ เมื่อเกิดกระแสไฟฟ้าตกเวลา 10 AM

$$P[A_1/B] = \frac{P[B/A_1] \cdot P[A_1]}{P[B]} = \frac{P[B/A_1] \cdot P[A_1]}{P[B/A_1] \cdot P[A_1] + P[B/A_2] \cdot P[A_2]}$$

$$= \frac{0.155 \times 0.16}{0.155 \times 0.16 + 0.008 \times 0.84} = 0.79$$

# Bayes’ Theorem

- สมมุติให้ เหตุการณ์ $A_1$ คือคุณภาพบกพร่อง, เหตุการณ์ $A_2$ คือคุณภาพดี , เหตุการณ์ $B$ คือเกิดกระแสไฟฟ้าตก, เหตุการณ์ $C$ คือเกิดวัตถุดิบไม่ได้คุณภาพ

ดังนั้น $P[A_1] + P[A_2] = 1$

ความน่าจะเป็นของชิ้นส่วนคุณภาพบกพร่อง $P[A_1] = \frac{879}{5500} = 0.16$

ความน่าจะเป็นของชิ้นส่วนคุณภาพดี $P[A_2] = \frac{(5500-879)}{5500} = 0.84$

$$P[C/A_1] = \frac{N^{CA_1}}{N^{A_1}} = \frac{177}{879} = 0.2014$$

$$P[C/A_2] = \frac{N^{CA_2}}{N^{A_2}} = \frac{81}{5500 - 879} = 0.0175$$

เราสามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการเกิดความบกพร่องในการผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ เมื่อวัตถุดิบไม่ได้คุณภาพเวลา 2PM

$$P[A_1/C] = \frac{P[C/A_1] \cdot P[A_1]}{P[C]} = \frac{P[C/A_1] \cdot P[A_1]}{P[C/A_1] \cdot P[A_1] + P[C/A_2] \cdot P[A_2]}$$

$$= \frac{0.2014 \times 0.16}{0.2014 \times 0.16 + 0.0175 \times 0.84} = 0.687$$

# Bayes' Theorem

- <u>Example 1.2</u> มี 3 โรงงานที่ผลิตอุปกรณ์ที่ช่วยลดสารเป็นพิษในระบบท่อไอเสียรถยนต์ โรงงานทั้งหมดนี้พยายามรักษาคุณสมบัติของอุปกรณ์ดังกล่าวในช่วง 2000 ชั่วโมงของการทำงานด้วยความน่าจะเป็น 0.83 (โรงงานที่1), 0.87 (โรงงานที่2), 0.92 (โรงงานที่3) มีอุปกรณ์ตัวหนึ่งเสียหลังจากทำงานไป 1500 ชั่วโมง และ อุปกรณ์ตัวที่สองเสียหลังจากทำงานไป 1800 ชั่วโมง โดยที่ไม่ทราบว่าเป็นของโรงงานใด จงหาความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์ดังกล่าวจะเป็นของโรงงานที่ 3
- <u>Sol:</u> เนื่องจากไม่ทราบว่าเป็นโรงงานใด $\therefore \mathrm{P}[\mathrm{M}_1] = \mathrm{P}[\mathrm{M}_2] = \mathrm{P}[\mathrm{M}_3] = 0.\dot{3}$

สมมุติให้เหตุการณ์ A แทนเหตุการณ์ที่อุปกรณ์เสียหลังจากทำงานไป 2000 ชั่วโมง ดังนั้น

$\mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_1] = 1 - 0.83 = 0.17$ ; $\mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_2] = 1 - 0.87 = 0.13$ ; $\mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_3] = 1 - 0.92 = 0.08$

ประเมินความน่าจะเป็นของ $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ถ้าอุปกรณ์ตัวที่1 เสีย (หลังจาก ทำงานไป 1500 ชั่วโมง ) ดังนั้น

$$\mathrm{P}[\mathrm{M}_1/\mathrm{A}] = \frac{\mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_1]\cdot\mathrm{P}[\mathrm{M}_1]}{\mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_1]\cdot\mathrm{P}[\mathrm{M}_1] + \mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_2]\cdot\mathrm{P}[\mathrm{M}_2] + \mathrm{P}[\mathrm{A}/\mathrm{M}_3]\cdot\mathrm{P}[\mathrm{M}_3]}$$

$$= \frac{0.17\times 0.\dot{3}}{0.17\times 0.\dot{3} + 0.13\times 0.\dot{3} + 0.08\times 0.\dot{3}} = \frac{0.05\dot{6}}{0.12\dot{6}} = 0.447$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{M}_2/\mathrm{A}] = \frac{0.13\times 0.\dot{3}}{0.17\times 0.\dot{3} + 0.13\times 0.\dot{3} + 0.08\times 0.\dot{3}} = \frac{0.04\dot{3}}{0.12\dot{6}} = 0.342$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{M}_3/\mathrm{A}] == \frac{0.08\times 0.\dot{3}}{0.17\times 0.\dot{3} + 0.13\times 0.\dot{3} + 0.08\times 0.\dot{3}} = \frac{0.02\dot{6}}{0.12\dot{6}} = 0.211$$

# Bayes'Theorem

ประเมินความน่าจะเป็นของ $M_1, M_2, M_3$ ถ้าอุปกรณ์ตัวที่2 เสีย (หลังจากทำงานไป 1800 ชั่วโมง )ดังนั้น

$P[A/M_1] = 1 - 0.83 = 0.17$ ; $P[A/M_2] = 1 - 0.87 = 0.13$ ; $P[A/M_3] = 1 - 0.92 = 0.08$

$$P[M_1/A] = \frac{P[A/M_1]\cdot P[M_1]}{P[A/M_1]\cdot P[M_1] + P[A/M_2]\cdot P[M_2] + P[A/M_3]\cdot P[M_3]}$$

$$= \frac{0.17 \times 0.447}{0.17 \times 0.447 + 0.13 \times 0.342 + 0.08 \times 0.211} = \frac{0.07599}{0.13733} = 0.553$$

$$P[M_2/A] = \frac{0.13 \times 0.342}{0.17 \times 0.447 + 0.13 \times 0.342 + 0.08 \times 0.211} = \frac{0.04446}{0.13733} = 0.324$$

$$P[M_3/A] = \frac{0.08 \times 0.211}{0.17 \times 0.447 + 0.13 \times 0.342 + 0.08 \times 0.211} = \frac{0.01688}{0.13733} = 0.123$$

# Bayes' Theorem

- <u>Example 1.3</u> การประเมินผลความสำเร็จทางการเรียนของนักศึกษาจากข้อมูลนักศึกษาทั้งหมด 1200 คน ที่ลงเรียนวิชา Math Modeling มีดังนี้ 225 คน (A) , 511 คน (B), 406 คน (C), 32 คน (D), 26 คน (F) และนักศึกษาในกลุ่มนี้ที่ได้ B วิชา Signals&Systems นั้น ในวิชา Math Modeling ได้เกรด 67(A), 211(B), 108(C), 4(D), และ 3 (F) ตามลำดับ ถ้าเรารู้ว่านายแซมได้ B ในวิชา Signals&Systems (Hint:เหตุการณ์ $\mathrm{B^{SS}}$) จงหาความน่าจะเป็นที่แซม จะได้ A, B, C ในวิชา Math Modeling

ประเมินความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะได้เกรด ต่างๆในวิชา Math Modeling

$$\mathrm{P[A]} = \frac{225}{1200} = 0.1875,$$

$$\mathrm{P[B]} = \frac{511}{1200} = 0.4258, \quad \mathrm{P[C]} = \frac{406}{1200} = 0.3383, \quad \mathrm{P[D]} = \frac{32}{1200} = 0.0267, \mathrm{P[F]} = \frac{26}{1200} = 0.0217$$

ประเมินความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probabilities)

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{B^{SS}/A}\right] = \frac{67}{225} = 0.298, \quad \mathrm{P}\left[\mathrm{B^{SS}/B}\right] = \frac{211}{511} = 0.413, \quad \mathrm{P}\left[\mathrm{B^{SS}/C}\right] = \frac{108}{406} = 0.266,$$

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{B^{SS}/D}\right] = \frac{4}{32} = 0.125, \quad \mathrm{P}\left[\mathrm{B^{SS}/F}\right] = \frac{3}{26} = 0.115$$

# Bayes' Theorem

ความน่าจะเป็นที่แซม จะได้ A ในวิชา Math Modeling เมื่อได้ B วิชา Signals&Systems = $P[A/B^{SS}]$

$$P[A/B^{SS}] = \frac{P[B^{SS}/A] \cdot P[A]}{P[B^{SS}]}$$

$$= \frac{P[B^{SS}/A] \cdot P[A]}{P[B^{SS}/A] \cdot P[A] + P[B^{SS}/B] \cdot P[B] + P[B^{SS}/C] \cdot P[C] + P[B^{SS}/D] \cdot P[D] + P[B^{SS}/F] \cdot P[F]}$$

$$= \frac{0.298 \times 0.1875}{0.298 \times 0.1875 + 0.413 \times 0.4258 + 0.266 \times 0.3383 + 0.125 \times 0.0267 + 0.0217 \times 0.115} = \frac{0.05588}{0.32755}$$

$$= 0.171$$

ความน่าจะเป็นที่แซม จะได้ B วิชา Math Modeling เมื่อได้ B วิชา Signals&Systems = $P[B/B^{SS}]$

$$P[B/B^{SS}] = \frac{P[B^{SS}/B] \cdot P[B]}{P[B^{SS}]} = \frac{0.413 \times 0.4258}{0.32755} = 0.537$$

ความน่าจะเป็นที่แซม จะได้ C ในวิชา Math Modeling เมื่อได้ B วิชา Signals&Systems = $P[C/B^{SS}]$

$$P[C/B^{SS}] = \frac{P[B^{SS}/C] \cdot P[C]}{P[B^{SS}]} = \frac{0.266 \times 0.3383}{0.32755} = 0.275$$

$P[A] = \frac{225}{1200} = 0.1875$, $P[B] = \frac{511}{1200} = 0.4258$, $P[C] = \frac{406}{1200} = 0.3383$, $P[D] = \frac{32}{1200} = 0.0267$, $P[F] = \frac{26}{1200} = 0.0217$

$P[B^{SS}/A] = \frac{67}{225} = 0.298$, $P[B^{SS}/B] = \frac{211}{511} = 0.413$, $P[B^{SS}/C] = \frac{108}{406} = 0.266$, $P[B^{SS}/D] = \frac{4}{32} = 0.125$, $P[B^{SS}/F] = \frac{3}{26} = 0.115$

# Bayes' Theorem

- Thomas Bayes (18th century English clergyman)
- If events $A_1, A_2, A_3$ constitute a complete group of mutually exclusive events, i.e. $P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] = 1$, and event B is related to $A_1, A_2, A_3$ via conditional probabilities $P[B/A_1], P[B/A_2], P[B/A_3]$, then $P[B] = P[B/A_1] \cdot P[A_1] + P[B/A_2] \cdot P[A_2] + P[B/A_3] \cdot P[A_3]$
- $P[B/A_1] \cdot P[A_1] + P[B/A_2] \cdot P[A_2] + P[B/A_3] \cdot P[A_3] \approx$
- $\frac{N^{BA_1}}{N^{A_1}} \frac{N^{A_1}}{N} + \frac{N^{BA_2}}{N^{A_2}} \frac{N^{A_2}}{N} + \frac{N^{BA_3}}{N^{A_3}} \frac{N^{A_3}}{N} \approx \frac{N^{BA_1} + N^{BA_2} + N^{BA_3}}{N} \approx \frac{N^B}{N} \approx P[B]$

# Bayes' Theorem

- $\mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_1] \times \mathrm{P}[\mathrm{A}_1] = \mathrm{P}[\mathrm{A}_1/\mathrm{B}] \times \mathrm{P}[\mathrm{B}]$
- $\mathrm{P}[\mathrm{B}] = \mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_1] \cdot \mathrm{P}[\mathrm{A}_1] + \mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_2] \cdot \mathrm{P}[\mathrm{A}_2] + \mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_3] \cdot \mathrm{P}[\mathrm{A}_3]$
- $\mathrm{P}[\mathrm{A}_1/\mathrm{B}] = \dfrac{\mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_1] \cdot \mathrm{P}[\mathrm{A}_1]}{\mathrm{P}[\mathrm{B}]}$

# Random Events

- $P[A/B] \times P[B] = P[B/A] \times P[A]$
- Events A and B are independent events if $P[A/B] = P[A]$
- *Multiplication of Probabilities:* If A & B are independent, $P[A/B] = P[A]$ then the probability of the simultaneous occurrence of events A & B is $P[AB] = P[A] \cdot P[B]$
- *Addition of Probabilities :* If A & B belong to a complete group of independent events, $P[A] + P[B] + P[C] + \cdots = 1$ , then $P[A \text{ or } B] = P[A] + P[B]$

# Random Variables

- A random variable can have any numerical value, x(k), at each trial, k=1,2,. . . Is the trial (realization) index.
- Detect min and max values of the variable within the array, $x_{min}$ and $x_{max}$.Divide interval [$x_{min}$, $x_{max}$] into M divs.
- Define step $D_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}$
- Compute the number of realizations within each interval, i.e. number of realizations $n_j$ such that

  $x_{min} + (j-1)D_x \leq x(k) \leq x_{min} + jD_x\;, j = 1,2,\ldots,M$
- Compute frequencies $f_j = \frac{n_j}{M}, j = 1,2,\ldots,M$

# Random Variables

- Build a histogram showing $f_j$ vs $x(k)$ values like the one shown below in Fig. 1.1 (it is said that a histogram relates values of a random variable to the frequency of occurrence of these values)
- $N \to \infty$, $M \to \infty$, $D_x \to 0$

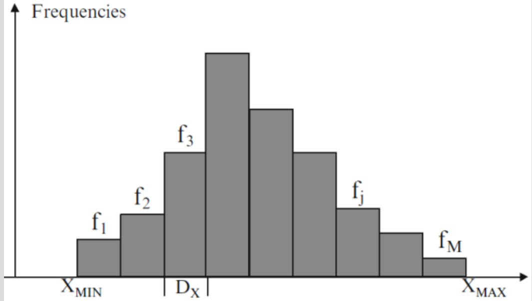



**Fig. 1.1** Probability distribution function

- Histogram turns into a continuous line that represents the distribution law of the random variable x(k), this is called the *probability density* P(x).

# Random Variables

- The *probability density function*(*pdf*) P(x) can be used to define the probability of random variable x(k) which satisfies the condition $x_1 \le x(k) \le x_2$ as follows:

$$P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = \int_{0}^{x_2} P(x)dx - \int_{0}^{x_1} P(x)dx$$

One can realize that,

$$P[-\infty \le x(k) \le +\infty] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = \int_{0}^{+\infty} P(x)dx - \int_{0}^{-\infty} P(x)dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} P(x)dx + \int_{-\infty}^{0} P(x)dx = 1$$

# Random Variables

- There are several "typical" distribution laws, however, the most common is called *normal distribution*, which provides the best description of most random phenomena observed in real life.
- Normal Distribution has the following probability density:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mu, \sigma)$$

where $\mu$ = mean value , $\sigma$ = standard deviation

$\mathrm{x} = [-5{:}\, 0.1{:}\, 5];\mathrm{u} = 0;\mathrm{sigma} = 2;$

$\mathrm{P} = 1/\mathrm{sig}/\mathrm{sqrt}(2 * \mathrm{pi}) * \exp(-(\mathrm{x} - \mathrm{u}).\,{}^\wedge 2/(2 * \mathrm{sig}^\wedge 2));$

$\mathrm{plot}(\mathrm{x}, \mathrm{P})$

# Random Variables

- Normal distribution law reflects fundamental properties of nature. In manufacturing, the σ of any variable characterizing the product represents effects of "forces of nature".
- On a manufacturing process, and the mean value (μ) represents effects of operators' efforts and adjustment of equipment.
- The following is the definition of the probability of a normally distributed random variable x(k), satisfying the condition $x_1 \leq x(k) \leq x_2$ :
- $P[x_1 \leq x(k) \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P(x, \mu, \sigma) dx = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

# Random Variables

$$P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P(x, \mu, \sigma)dx$$

$$= \int_{0}^{x_2} P(x, \mu, \sigma)dx - \int_{0}^{x_1} P(x, \mu, \sigma)dx = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Where,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}, z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma},$$

$$\Phi(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z_2} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz, \qquad \Phi(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z_1} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz$$

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = 0.5$$

```
function y = f(x); y=1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2); endfunction
int= quadcc("f", 0, inf, 1.0e-6)
```

# Random Variables

- Example 1.4 ประเมินผลการปรับปรุงในระบบอัตโนมัติ:

โรงงานจำเป็นต้องผลิตกลอนประตูที่ดี จำนวน 300,000 ชิ้น ค่าใช้จ่ายต่อชิ้นเท่ากับ 15 บาท ความยาวที่ยอมรับได้ของกลอนประตูต้องอยู่ระหว่าง 0.194 ถึง 0.204 นิ้ว เมื่อใช้เครื่องมือที่มีอยู่ทำการวัดโดยได้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_{\text{old}}$ เท่ากับ 0.003 นิ้ว ถ้าจะปรับปรุงระบบอัตโนมัติให้มีความทันสมัยจะทำให้ได้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_{\text{new}}$ เท่ากับ 0.00133 นิ้ว โดยจะมีค่าใช้จ่ายในการปรับปรุงครั้งนี้เท่ากับ 350,000 บาท จงหาว่าจะคุ้มค่าหรือไม่ที่จะปรับปรุงระบบในครั้งนี้

Sol: เนื่องจากความยาวของกลอนประตูที่ยอมรับได้อยู่ระหว่าง 0.194 ถึง 0.204 นิ้ว และต้องผลิต จำนวน 300,000 ชิ้น

- ค่าเฉลี่ยของความยาวกลอนประตูที่ดีเท่ากับ $\mu = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0.194+0.204}{2} = 0.199$ นิ้ว
- $\sigma_{\text{old}} = 0.003$ นิ้ว
- หาความน่าจะเป็นของความยาวกลอนประตูที่อยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ $P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P(x, \mu, \sigma)dx$ โดยคิดว่าเป็นการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution):

# Random Variables

- $P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{0.194 - 0.199}{0.003} = -1.67, z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{0.204 - 0.199}{0.003} = 1.67$$

$$P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.67}^{1.67} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1.67} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz$$
$$= 0.905$$

จากผลที่ได้แสดงว่า เพื่อที่จะผลิตกลอนประตูที่ดีจำนวน 300,000 ชิ้น จะต้องผลิตกลอนประตูทั้งหมด

เท่ากับ $\frac{300000}{0.90508} = 331{,}491$ชิ้น $\therefore$ ต้องผลิตมากขึ้น จำนวน 31,491 ชิ้นเป็นเงิน

$31{,}491 \times 15$บาท $= 472{,}365$ บาท

# Random Variables

- ถ้าปรับปรุงระบบอัตโนมัติให้มีความทันสมัยจะทำให้ได้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 0.00133 นิ้ว

- $P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{0.194-0.199}{0.00133} = -3.76, z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{0.204-0.199}{0.00133} = 3.76$

$$P[x_1 \le x(k) \le x_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3.76}^{3.76} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{3.76} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz$$

$$= 0.99983$$

จากผลที่ได้แสดงว่า เพื่อที่จะผลิตกลอนประตูที่ดีจำนวน 300,000 ชิ้น จะต้องผลิตกลอนประตูทั้งหมด

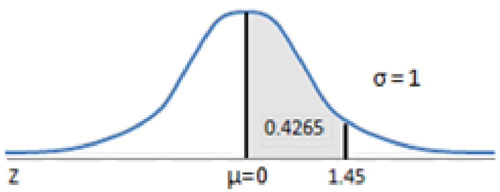
เท่ากับ $\frac{300000}{0.99983} = 300{,}051$ชิ้น $\therefore$ ต้องผลิตมากขึ้น จำนวน 51 ชิ้น เป็นเงิน 51×15=765 บาท

ประหยัดเงิน = **472365-765-350000=121600** คุ้มค่า

| Z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | $\boxed{0.4525}$ | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.1 | 0.4990 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4993 | 0.4993 |
| 3.2 | 0.4993 | 0.4993 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 |
| 3.3 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4997 |
| 3.4 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4998 |
| 3.5 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 |
| 3.6 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.7 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | $\boxed{0.4999}$ | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.8 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.9 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |

## Areas Under the One-Tailed Standard Normal Curve

This table provides the area between the mean and some Z score.
For example, when Z score = 1.45 the area = 0.4265.




0.4525*2=0.905

0.4999*2=0.9998