Engineering Math 2 (12026003)

Lecture 3 (Complex Analysis)

Dr. Santhad Chuwongin

Outline

17.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

17.2 ยกกำลังและราก (Powers and Roots)

17.3 เซ็ทในระนาบเชิงซ้อน (Sets in the Complex Plane)

17.4 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(Functions of a Complex Variable)

17.5 สมการโคชี-รีมันน์(Cauchy–Riemann Equations)

17.6 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม (Exponential and Logarithmic Functions)

17.7 ฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (Trigonometric and Hyperbolic Functions)

17.8 อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค (Inverse Trigonometric and Hyperbolic Functions)

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

- จำนวนเชิงซ้อน คือจำนวนใดๆที่อยู่ในรูป $z = x + iy$ โดยที่ x และ y คือจำนวนจริง และ i คือจำนวนจินตภาพ$= \sqrt{-1}$
  - x คือส่วนจริง หรือ $\mathrm{Re}(z)$
  - y คือส่วนจินตภาพ หรือ $\mathrm{Im}(z)$
  - จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนจะเท่ากัน ถ้าทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพเท่ากัน

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

- การดำเนินการเกี่ยวกับเลขคณิต (Arithmetic operations) ที่ถูกกระทำกับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = x_1 + iy_1$และ $z_2 = x_2 + iy_2$
  - การบวก: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  - การลบ: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
  - การคูณ: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$
  - การหาร: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\left(\frac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}\right)$
- โมดูลัส หรือค่าสัมบูรณ์ของ $\mathrm{z} = x + iy$

เท่ากับ $|\mathrm{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

- กฎเหล่านี้ใช้ได้กับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2
  - การสลับที่: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

    $z_1 z_2 = z_2 z_1$
  - การเปลี่ยนหมู่: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

    $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
  - การแจกแจง : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ยกกำลังและราก (Powers and Roots)

- จำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูป $z = r(cos\,\theta + isin\,\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)
  - r คือค่าโมดูลัสของ z
  - θ คือค่าอากิวเมนต์ของ z และ $\theta = \arg z$

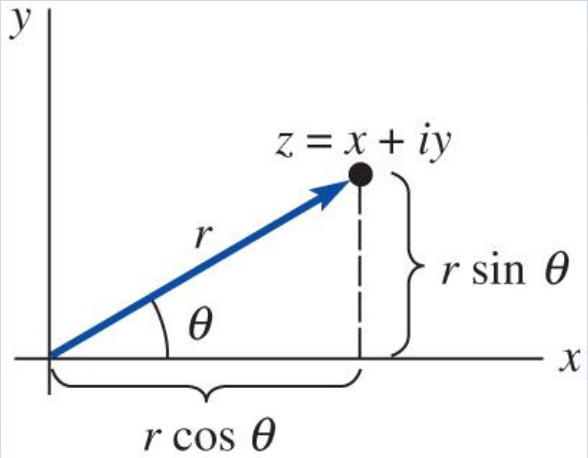


Figure 17.2.1: Polar coordinates

ยกกำลังและราก (Powers and Roots)

- จำนวนเชิงซ้อนยกกำลังจำนวนเต็มถูกแสดงได้โดย

$$z^n = r^n(cos\, n\theta + isin\, n\theta)$$

- การคูณและการหารในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + isin\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[cos\,(\theta_1 - \theta_2) + isin\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

- จากสมการด้านบน ได้ว่า

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\,(z_1 z_2) = \arg\,(z_1) + \arg\,(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\,(z_1) - \arg\,(z_2)$$

ยกกำลังและราก (Powers and Roots)

- สูตรของเดอมัวร์ (DeMoivre's formula) มีประโยชน์ในการหาเอกลักษณ์ตรีโกณมิติบางอย่าง
  - เมื่อ $z = r(cos\,\theta + isin\,\theta)$,สูตรของเดอมัวร์กล่าวว่า

$$(cos\,\theta + isin\,\theta)^n = \ (cos\,n\theta + isin\,n\theta)$$

- รากของจำนวนเชิงซ้อนมีค่าเท่ากับ

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

  - เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ คือจำนวนค่ารากที่ n

เซ็ทในระนาบเชิงซ้อน (Sets in the Complex Plane)

- ถ้าแต่ละจุด z ของเซ็ท S เป็นจุดที่อยู่ภายใน(interior point), S จะเป็นเซ็ทเปิด (open set) ดังรูปซ้ายมือ

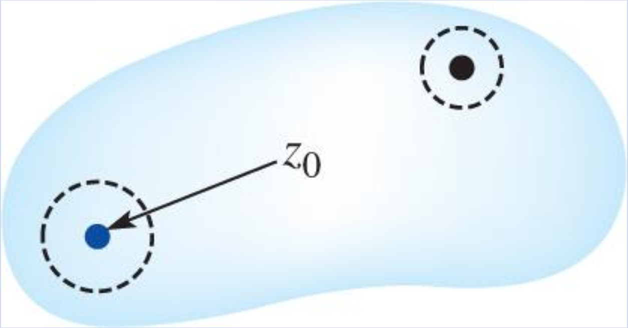


Figure 17.3.2: Open set

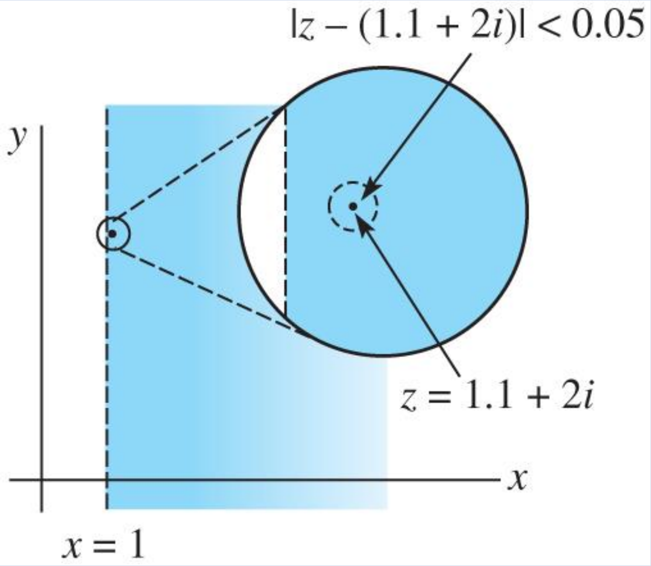


Figure 17.3.3: Open set magnified view of a point near $x = 1$

เซ็ทในระนาบเชิงซ้อน (Sets in the Complex Plane)

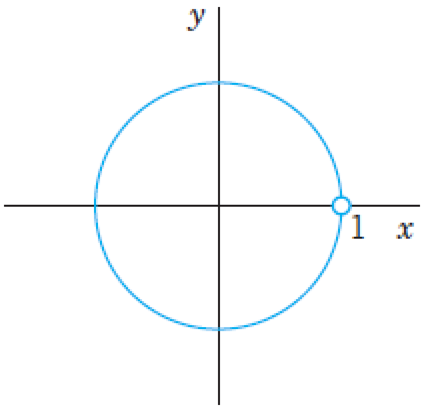


Fig. 330. Unit circle

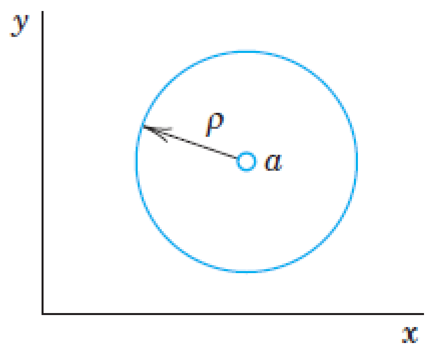


Fig. 331. Circle in the complex plane

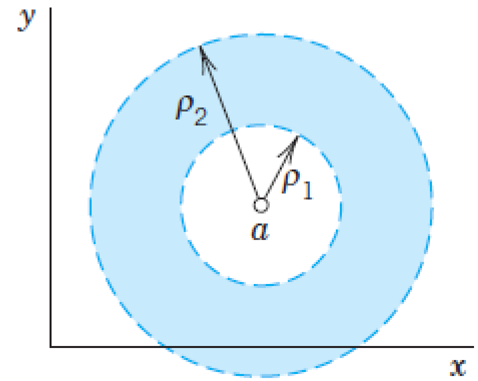


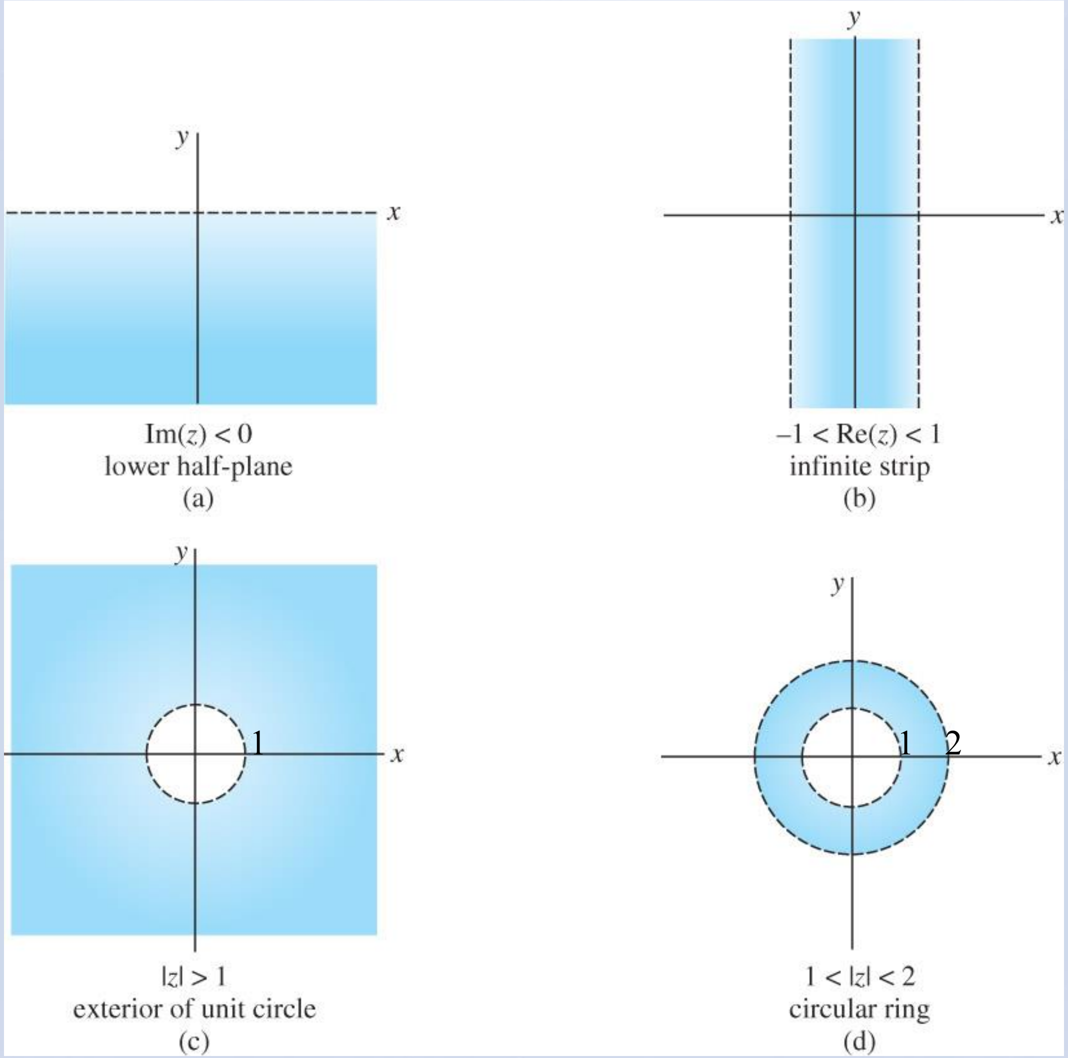
Fig. 332. Annulus in the complex plane

$$|z| = 1$$

$$|z - a| = \rho$$

$$\rho_1 < |z - a| < \rho_2$$

เซ็ทในระนาบเชิงซ้อน (Sets in the Complex Plane)



เซ็ทในระนาบเชิงซ้อน (Sets in the Complex Plane)

- ถ้ามีจุด z_1 และ z_2 ในเซ็ทเปิด S ถูกเชื่อมต่อโดยเส้นที่มีหลายมุมทั่วทั้ง S เราจะเรียก S ว่า “connected set”
- เซ็ทที่ถูกเชื่อมต่อเหล่านี้จะถูกเรียกว่า “โดเมน”
- รีเจียน (region) คือโดเมนในระนาบเชิงซ้อน

  ทั้งหมด, บางส่วน, หรือ ไม่มีขอบเขต

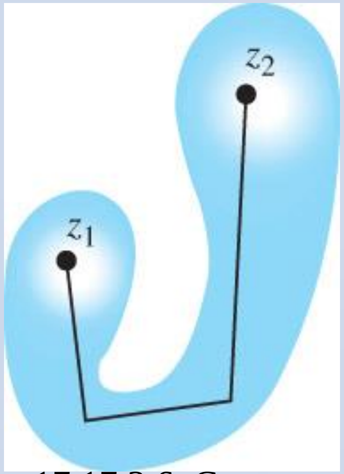


Figure 17.17.3.6: Connected set

- รีเจียน ที่ประกอบด้วยจุดทั้งหมดของขอบเขตจะถูกเรียกว่าปิด (closed)

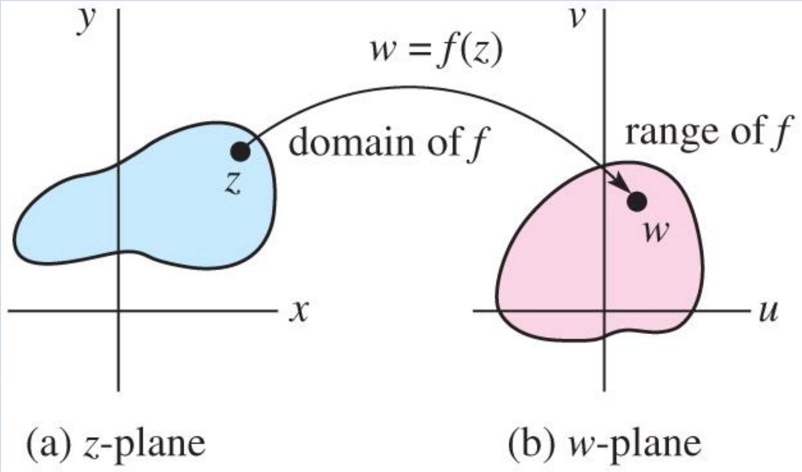
ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(Functions of a Complex Variable)

- ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน f จากเซ็ท Z ไป W คือความสัมพันธ์ (rule of correspondence) ซึ่งกำหนดว่าแต่ละองค์ประกอบใน Z สัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งแต่ละองค์ประกอบใน W โดยที่ Z เซ็ทของจำนวนเชิงซ้อน z
  - ถ้า w เป็นองค์ประกอบใน W ถูกกำหนดไปหา z ใน Z, w คือภาพ (image) ของ z และถูกเขียนเป็น $w = f(z)$
  - Z เป็นโดเมนของ f
  - เซ็ทของทุกภาพใน W คือเรนจ์ (range) ของ f

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(Functions of a Complex Variable)

- กราฟของ $w = f(z)$ ไม่สามารถถูกวาดได้เนื่องจากมันต้องการทั้งหมด 4 แกนในระบบพิกัด 4 มิติ



- ฟังก์ชันจะถูกแปลเป็นการแมปปิ้ง (mapping) หรือการแปลง (transformation) จากระนาบ z ไประนาบ w

Figure 17.4.1: Mapping from *z*-plane to *w*-plane

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน(Functions of a Complex Variable)

- ลิมิตของ f ที่ z_0 คือ $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$

  สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ดังนั้น $|f(z) - L| < \varepsilon$

  เมื่อไหร่ก็ตามที่ $0 < |z - z_0| < \delta$

Theorem 17.4.1 Limit of Sum, Product, Quotient

Suppose $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1$ and $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$. Then

(i) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L_1 + L_2$

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = L_1 L_2$

(iii) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

* f must be defined in a neighborhood of z_0

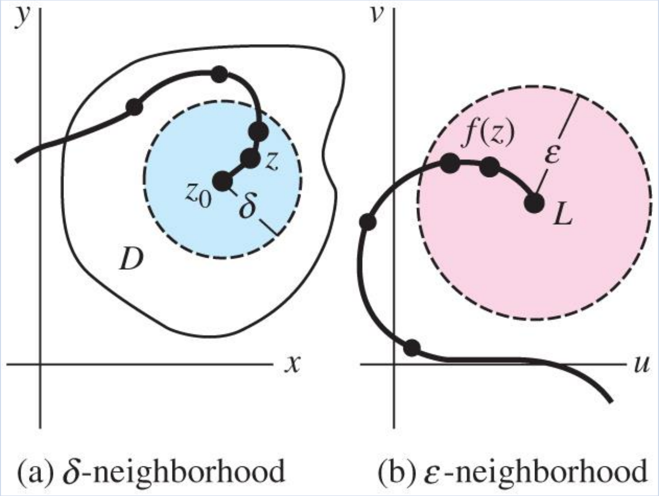


Figure 17.4.5: Geometric meaning of a complex limit

สมการโคชี-รีมันน์(Cauchy–Riemann Equations)

- สมการโคชี-รีมันน์ สัมพันธ์กับอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 1
  - ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $z = x + iy$ ดังนั้น ที่จุด z จะมีอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 1 ของ u และ v และสอดคล้องกับ สมการโคชี-รีมันน์

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

สมการโคชี-รีมันน์(Cauchy–Riemann Equations)

- ค่าจริงของฟังก์ชัน $\phi(x, y)$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 2 ต่อเนื่องในโดเมน D และสอดคล้องกับสมการลาปลาซ จะถูกเรียกว่า ฮาร์โมนิค (harmonic) ใน D
- ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน ถ้ามันมีอนุพันธ์ทุกจุด
- ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน Dดังนั้นฟังก์ชัน u และ v เป็นฮาร์โมนิค

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

(Exponential and Logarithmic Functions)

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cos\, y + isin\, y)$$

- อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

- มีค่าเป็นอินฟินิตี้ของค่าลอกาลิทึมของจำนวนเชิงซ้อน z

$$\ln z = \log_e|z| + i(\theta + 2n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค

(Trigonometric and Hyperbolic Functions)

- สำหรับจำนวนเชิงซ้อน ใดๆ $z = x + iy$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- ค่าอนุพันธ์และค่าเอกลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเหมือนกับฟังก์ชันจำนวนจริง
- ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคไซน์และโคไซน์ เทียบได้กับจำนวนจริง

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณและไฮเพอร์โบลิค

(Inverse Trigonometric and Hyperbolic Functions)

- อินเวอร์สของฟังก์ชันลอกาลิทึมและอนุพันธ์ มีค่าดังนี้

$$\sin^{-1} z = -i\, ln\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \frac{d\sin^{-1}z}{dz} = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos^{-1} z = -i\, ln\left[z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \frac{d\cos^{-1}z}{dz} = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} ln \frac{i + z}{i - z} \qquad \frac{d\tan^{-1}z}{dz} = \frac{1}{1 + z^2}$$

Engineering Math 2 (12026003)

Lecture 4 (Integration in the Complex Plane)

Dr. Santhad Chuwongin

Outline

18.1 คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

18.2 ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

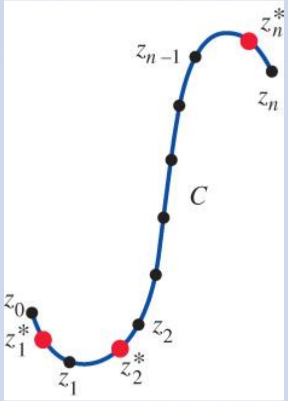
18.3 ความเป็นอิสระของเส้นทาง (Independence of the Path)

18.4 สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ สามารถหาค่าได้ที่ทุกจุดบนเส้นโค้งเรียบ C ซึ่งคือ $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$
- แบ่ง Cเป็น n ส่วนดังนี้ $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_1 = b$ บนช่วง $[a,b]$
- $z_0 = x_0 + iy_0 = x(t_0) + iy(t_0), \ldots, z_n = x_n + iy_n = x(t_n) + iy(t_n)$ โดยให้ $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$
- ให้ $||P||$เป็นนอร์มของส่วนซึ่งมีค่ามากที่สุดของ $|\Delta z_k|$
- เลือกจุดตัวอย่าง $z_k{}^* = x_k{}^* + iy_k{}^*$ บนแต่ละส่วน(จุดแดง)
- หาผลรวม

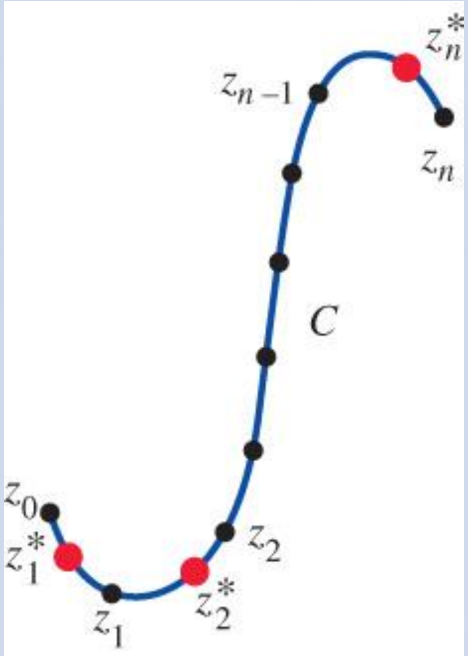
$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k{}^*)\,\Delta z_k$$



คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- อินทิกรัลของ $f(z)$ บนเส้นโค้งเรียบ C ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (contour or path) ถูกเรียกว่า คอนทัวร์อินทิกรัลหรือคอมเพล็กซ์อินทิกรัล

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f({z_k}^*)\,\Delta z_k$$



C ถูกกำหนดโดย $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$

- คอนทัวร์อินทิกรัล จะมีค่าเท่ากับ

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)dt$$

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- คุณสมบัติของคอนทัวร์อินทิกรัล เปรียบเทียบได้กับคุณสมบัติของไลน์อินทิกรัล

Theorem 18.1.2 Properties of Contour Integrals

Suppose f and g are continuous in a domain D and C is a smooth curve lying entirely in D. Then

(*i*) $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, k a constant

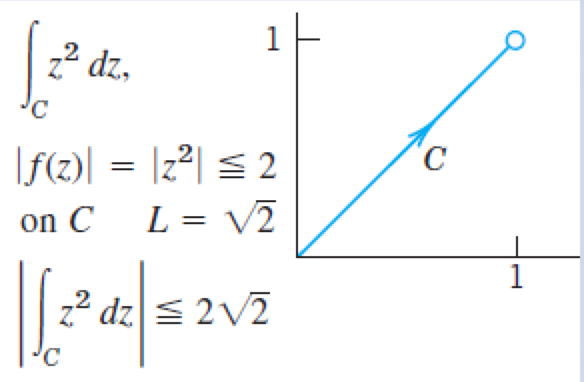
(*ii*) $\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

(*iii*) $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$, where C is the union of the smooth curves C_1 and C_2

(*iv*) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, where $-C$ denotes the curve having the opposite orientation of C.

คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- ถ้า f ต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C และถ้า $|f(z)| \le M$ สำหรับทุกจุด z บน C, ดังนั้น $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$ โดยที่ L เป็นความยาวของ C
  - ทฤษฎีขอบเขต (Bounding Theorem) หรือบางครั้งถูกเรียกว่า "***ML*-inequality**"
  - มีประโยชน์ในเรื่องทฤษฎีของการอินทิเกรทจำนวนเชิงซ้อน



คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

- จงหาขอบเขตบนของโจทย์ โดยใช้ ***ML*-inequality** โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 4$
- ในข้อ **3,** C คือ quarter ของวงกลม $|z| = 4$ จาก $z = 4i$ ถึง $z = 4$

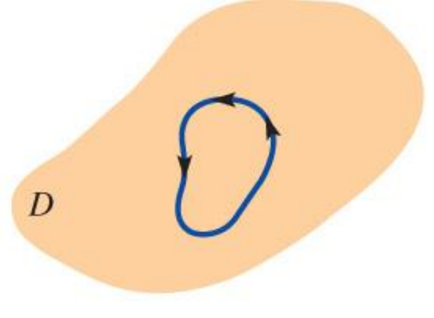
$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz\right| \leq \frac{e^4 8\pi}{3} \approx 457$$

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{8\pi|e^z|}{|z|^2-1} = \frac{e^4 8\pi}{15} \approx 91.5$$

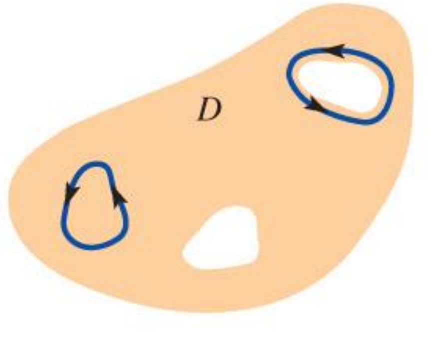
$$\left|\oint_C \frac{1}{z^3}\,dz\right| \leq \frac{2\pi}{|4|^3} = \frac{\pi}{32}$$

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- ประเภทโดเมน
- โดเมนจะเป็น ***simply connected*** ถ้าทุกๆ simple closed contour C ทั้งหมดที่อยู่ในโดเมนนี้ปิดล้อมเพียงจุด D (หรือ โดเมนไม่มีรู)
- โดเมนที่ไม่เป็น ***simply connected*** จะเป็น ***multiply connected***
  - โดเมนที่มี 1 "hole" จะเป็น ***doubly connected***
  - โดเมนที่มี 2 "hole" จะเป็น ***triply connected***



(a) Simply connected domain

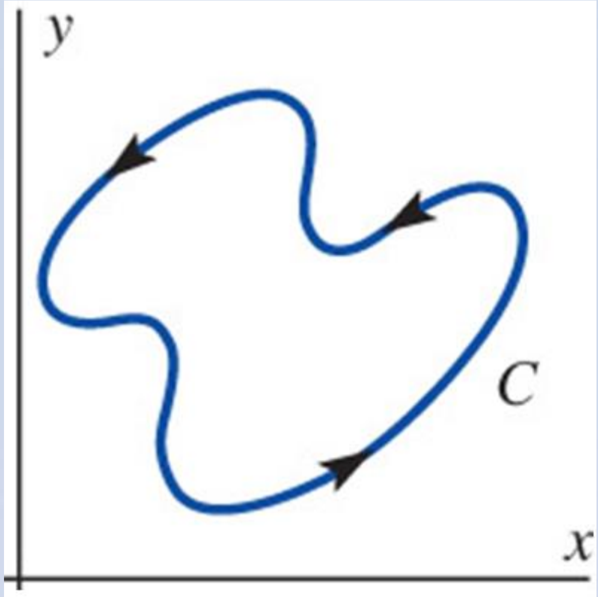


(b) Multiply connected domain

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- ตามที่ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาตกล่าวไว้ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic) ในโดเมน D ที่เป็นแบบ ***simply connected*** ค่าของคอนทัวร์อินทิกรัล $\oint_C f(z)dz$ มีค่าเท่ากันสำหรับเส้นโค้งปิด C ซึ่งอยู่ภายใน D ทั้งหมด

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ทุกๆจุดที่อยู่ภายในหรือบนคอนทัวร์ C, แล้ว $\oint_C f(z)fz = 0$



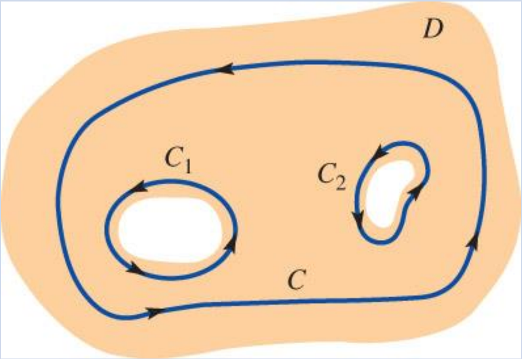
ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

- การพิสูจน์ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat theorem) จะใช้ทฤษฎีบทของกรีน (Green’s theorem) และสมการของโคชี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann equations)
- $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $z(x,y) = x + iy$
- $\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y) + iv(x,y)][dx + idy] = \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA$
- ถ้า f เป็น analytic, ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ทำให้ $\oint_C f(z)dz = 0$

ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

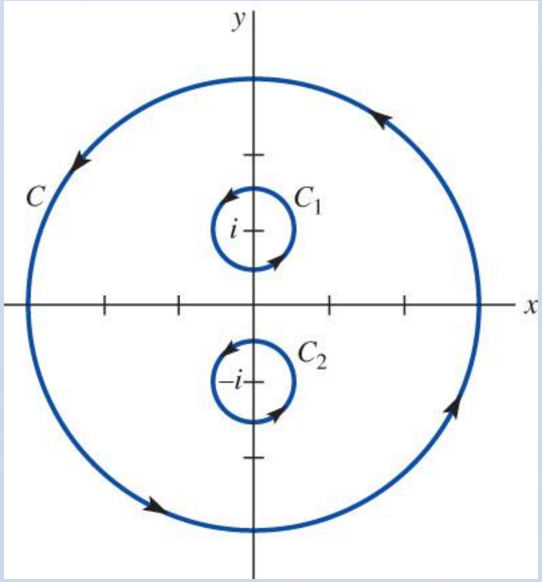
- ในโดเมนที่เป็นแบบ ***multiply connected***, $\oint_C f(z)\,dz \neq 0$
  - สมมุติว่า $C, C_1, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งแบบ ***simple closed*** ที่มีทิศทางเป็นบวก $C_1, C_2, \ldots, C_n$ อยู่ใน C
  - แต่บริเวณที่อยู่ภายในของแต่ละ $C_k, k = 1,2, \ldots, n$ จะไม่มีจุดร่วมกัน
  - f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแต่ละคอนทัวร์และที่แต่ละจุดภายใน C แต่ไม่ใช่ภายนอก $C_k, k = 1,2, \ldots, n$

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$



ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต (Cauchy–Goursat Theorem)

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$



จงหาค่า $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$ โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 3$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1/2i}{z-i} - \frac{1/2i}{z+i}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{C_1} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2i}(2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i) = 0$$

ความเป็นอิสระของเส้นทาง (Independence of the Path)

- คอนทัวร์อินทิกรัล $\int_C f(z)dz$ เป็นอิสระของเส้นทาง ถ้าค่าของมันมีค่าเท่ากันในทุกเส้นทางคงที่ C ด้วยจุดเริ่มต้น z_0และจุดสิ้นสุด z_1 ใน D

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน ***simply connected domain*** D, ดังนั้น $\int_C f(z)dz$ เป็นอิสระของเส้นทาง C

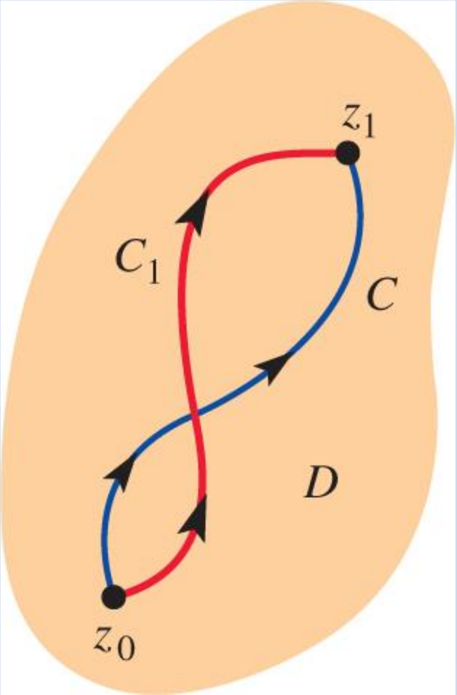


Figure 18.3.1: If *f* is analytic in *D*, integrals on *C* and C_1 are equal

ความเป็นอิสระของเส้นทาง (Independence of the Path)

- ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สามารถมีได้ โดยที่ $F'(z) = f(z)$ ดังนั้น, F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ***(antiderivative)***
- ตัวอย่าง , $F(z) = -\cos z$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = \sin z$ เพราะว่า $F'(z) = \sin z$
- ถ้า f ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในโดเมน D และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ในโดเมน D , ดังนั้น สำหรับทุกคอนทัวร์ C ซึ่งมีจุดเริ่มต้น z_0 และจุดสิ้นสุด z_1 ใน D

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

- ทฤษฎีบทของโคชี-กูร์ซาต มีความสำคัญหลายอย่าง
  - ค่าของฟังก์ชันวิเคราะห์ f ที่จุด z_0 ใดๆในโดเมนแบบ ***simply connected*** สามารถถูกแทนด้วยคอนทัวร์อินทิกรัล

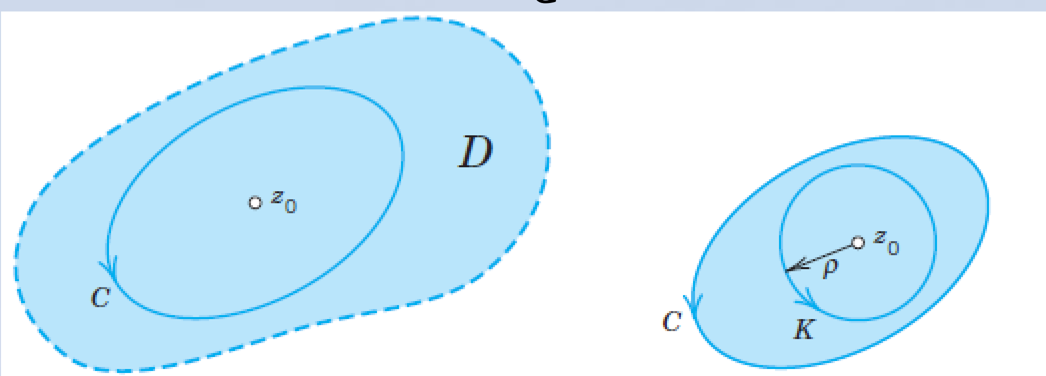
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

  - ฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมนแบบ ***simply connected*** สามารถหาอนุพันธ์ทุกลำดับ $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

- ตามที่สูตรโคชีอินทิกรัลกล่าวไว้ สำหรับฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมน D แบบ ***simply connected***, ด้วย C เป็นคอนทัวร์แบบ ***simple closed*** อยู่ใน D และจุด z_0 ใดๆที่อยู่ภายใน C ดังแสดงในรูปด้านล่าง

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$



Cauchy's integral formula   Proof of Cauchy's integral formula

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy's Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = ?$$ โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 2$

$$\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\big((-i)^2+4i+4\big) = 2\pi(-4+3i)$$

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = ?$$ โดยที่ C คือวงกลม $|z-2i| = 4$

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = \oint_C \frac{z}{(z+3i)(z-3i)}\,dz = \oint_C \frac{z/(z+3i)}{z-3i}\,dz$$

$$= 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz = ?$$ โดยที่ C คือวงกลม $|z| = 1$

$$= \oint_C \frac{z+1}{z^3(z+4)}\,dz \qquad = \oint_C \frac{(z+1)/(z+4)}{z^3}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} f''(0)$$

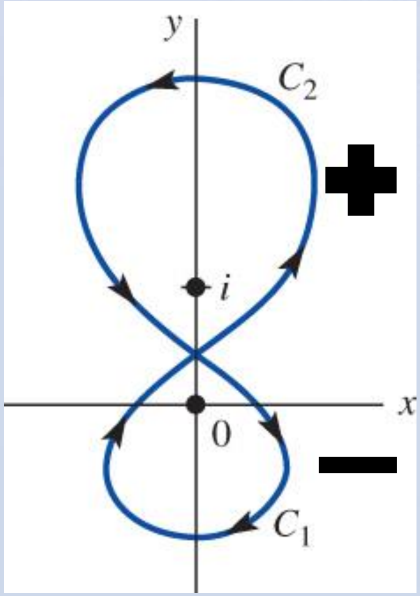
$$= \frac{2\pi i}{2!}\left(-\frac{6}{(0+4)^3}\right)$$

$$= -\frac{3\pi i}{32}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = ?$$ โดยที่ C คือ



$$= \oint_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{(z^3+3)/(z-i)^2}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{(z^3+3)/z}{(z-i)^2}\,dz$$

$$= (2\pi i \times 3)\; + \frac{2\pi i}{1!} f'(i)$$

$$= 6\pi i + 2\pi i(2i - 3/i^2)$$

$$= 6\pi i - 4\pi + 6\pi i$$

$$= 12\pi i - 4\pi$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + 2\pi i f(z_0)$$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ z_0 จะทำให้ $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ สำหรับ $\varepsilon>0$ แต่เล็กมากๆ

และ $|z-z_0|<\delta$ สำหรับ $\delta>0$ และถ้าเราเลือก C_1 ให้เป็น $|z-z_0|=\frac{\delta}{2}$ ดังนั้น ใช้ *ML*-inequality

$$\left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{2\varepsilon}{\delta}2\pi\frac{\delta}{2} = 2\pi\varepsilon = 0$$ เนื่องจาก ε เล็กมากๆ

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + 2\pi i f(z_0)$$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ z_0 จะทำให้ $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ สำหรับ $\varepsilon>0$ แต่เล็กมากๆ

และ $|z-z_0|<\delta$ สำหรับ $\delta>0$ และถ้าเราเลือก C_1 ให้เป็น $|z-z_0|=\frac{\delta}{2}$ ดังนั้น ใช้ *ML*-inequality

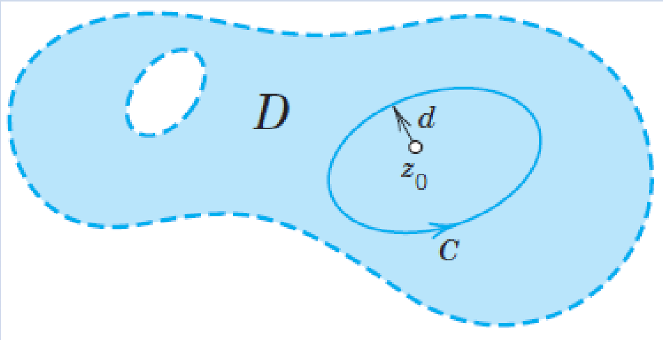
$$\left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{2\varepsilon}{\delta}2\pi\frac{\delta}{2} = 2\pi\varepsilon = 0$$ เนื่องจาก ε เล็กมากๆ

สูตรโคชีอินทิกรัลสำหรับอนุพันธ์

(Cauchy’s Integral Formulas for Derivatives)

- ตามที่สูตรโคชีอินทิกรัลกล่าวไว้เกี่ยวกับอนุพันธ์, สำหรับฟังก์ชันวิเคราะห์ f ในโดเมน D แบบ ***simply connected*** ซึ่งมี C เป็นคอนทัวร์แบบ ***simple closed*** ที่อยู่ภายใน D และ z_0 เป็นจุดใดๆที่อยู่ภายใน C อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ f ที่จุด z_0 จะเท่ากับ

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$



สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy’s Integral Formulas)

- ถ้าเรามีคอนทัวร์ C เป็นวงกลม $|z - z_0| = \mathrm{r}$ ดังนั้น,มันเป็นไปตามสูตรโคชีอินทิกรัลสำหรับอนุพันธ์ และ ***ML*-inequality** ดังนั้น

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!\, M}{r^n}$$

โดยที่ M คือจำนวนจริง ซึ่ง $|f(z)| \leq M$ สำหรับทุกจุดบน C ผลจากสมการนี้จะถูกเรียกว่า “Cauchy’s inequality” ซึ่งจะถูกใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของลิววิว (Liouville’s Theorem) (The only bounded entire functions are constants)