Engineering Math 2 (12026003)

Lecture 5 (Series and Residues)

Dr. Santhad Chuwongin

Outline

19.1 ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

19.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

19.3 อนุกรมลอเรนต์(Laurent Series)

19.4 ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

19.5 ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง(Residues and Residue Theorem)

19.6 การประมาณค่าอินทิกรัลจริง (Evaluation of Real Integrals)

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- ลำดับของฟังก์ชัน $\{z_n\}$ ซึ่งมีโดเมนเป็นเซ็ทของจำนวนเต็มบวก

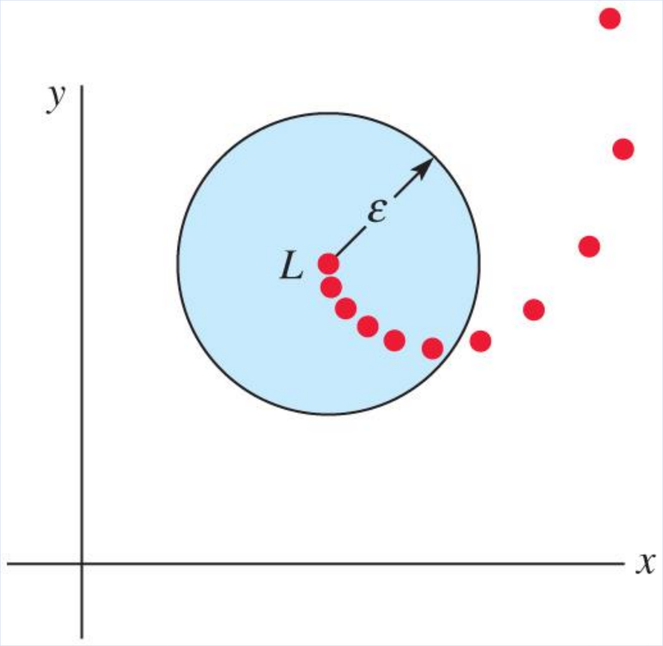

Figure 19.1.1: If $\{z_n\}$ converges to L, all but a finite number of terms are in any ε-neighborhood of L

- ถ้า $\lim_{n \to \infty} z_n = L$ ดังนั้น ลำดับ $\{z_n\}$ จะลู่เข้า(Convergent)
- $\{z_n\}$ จะลู่เข้า ถ้าสำหรับแต่ละค่า **ε** ที่เป็นบวก สามารถหาค่า N ได้ ทำให้ $|z_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- <u>ตัวอย่าง: </u>ลำดับลู่เข้า
  - ลำดับ $\left\{\frac{i^{n+1}}{n}\right\}$ ลู่เข้าเพราะ $\lim_{n\to\infty} \frac{i^{n+1}}{n} = 0$
    ดังจะเห็นได้จาก $-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}$ เมื่อ $n = 1,2,3,4,5$
  - ลำดับ $\{z_n\}$ จะลู่เข้าสู่จำนวนเชิงซ้อน L ถ้าหรือเพียงถ้า
    $\mathrm{Re}(z_n)$ ลู่เข้าสู่ $\mathrm{Re}(L)$ และ
    $\mathrm{Im}(z_n)$ ลู่เข้าสู่ $\mathrm{Im}(L)$

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- เงื่อนไขสำหรับการลู่ออก (Divergence) และลู่เข้า (Convergence)
  - ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ลู่เข้า, ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$
  - ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, ดังนั้นอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ลู่ออก
  - อนุกรมอนันต์ (Infinite series) $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ถูกเรียกว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely convergent) $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ ลู่เข้า
    - การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์บอกเป็นนัยว่า “ลู่เข้า”

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- เวอร์ชั่นเชิงซ้อนของการทดสอบอัตราส่วนและรากสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมกำลัง (power series)

Theorem 19.1.4 Ratio Test

Suppose $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is a series of nonzero complex terms such that

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L. \tag{9}$$

(*i*) If $L < 1$, then the series converges absolutely.
(*ii*) If $L > 1$ or $L = \infty$, then the series diverges.
(*iii*) If $L = 1$, the test is inconclusive.

ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

- เวอร์ชั่นเชิงซ้อนของการทดสอบอัตราส่วนและรากสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมกำลัง (power series)

Theorem 19.1.5 Root Test

Suppose $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is a series of complex terms such that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

(*i*) If $L < 1$, then the series converges absolutely.
(*ii*) If $L > 1$ or $L = \infty$, then the series diverges.
(*iii*) If $L = 1$, the test is inconclusive.

- อนุกรมกำลัง อยู่ในรูปดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

- คุณสมบัติของอนุกรมกำลัง (Properties of a power series)
  - มันแทนฟังก์ชันต่อเนื่อง f ภายในวงกลมของการลู่เข้า $|z - z_0| = R$ โดยที่ $R \neq 0$
  - มันถูกรวมเทอมต่อเทอมภายในวงกลมของการลู่เข้าสำหรับทุกๆ คอนทัวร์ C ทั้งหมดภายในวงกลม
  - มันถูกอนุพันธ์เทอมต่อเทอม ภายในวงกลมของการลู่เข้า
  - มันแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงกลมของการลู่เข้า

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมน D และ z_0 เป็น จุดใน D, f จะมีอนุกรมเทย์เลอร์ดังนี้

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

ใช้ได้สำหรับวงกลมใหญ่สุด C ด้วยจุดศูนย์กลางและรัศมี R ทั้งหมดภายใน C

- อนุกรมเทย์เลอร์ ด้วยจุดศูนย์กลางคือ อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)

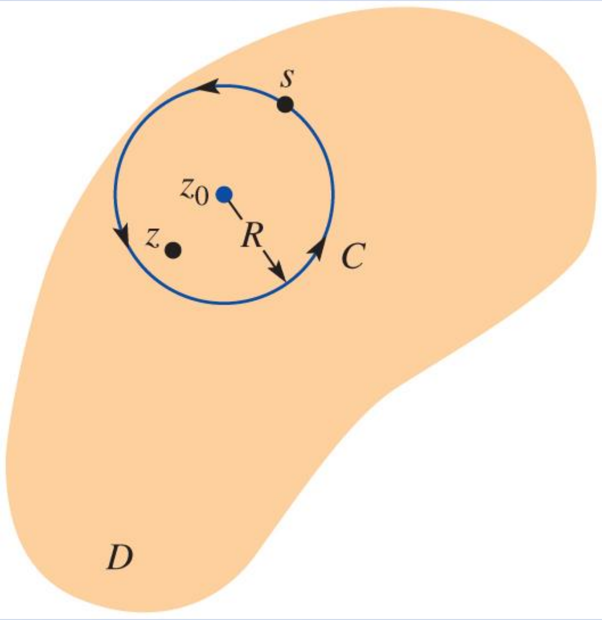

Figure 19.2.1: Circular contour *C* used in proof of Theorem 19.2.4

อนุกรมลอเรนต์(Laurent Series)

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนรูปวงแหวน D ซึ่งถูกกำหนด โดย $r < |z - z_0| < R$,ดังนั้น f มีอนุกรมลอเรนต์ ดังนี้
  – ใช้ได้สำหรับ $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$
  – z_0 อยู่ภายใน C, ซึ่งทั้งหมดอยู่ใน D
  – ค่าสัมประสิทธิ์ ถูกเขียนได้ดังนี้

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

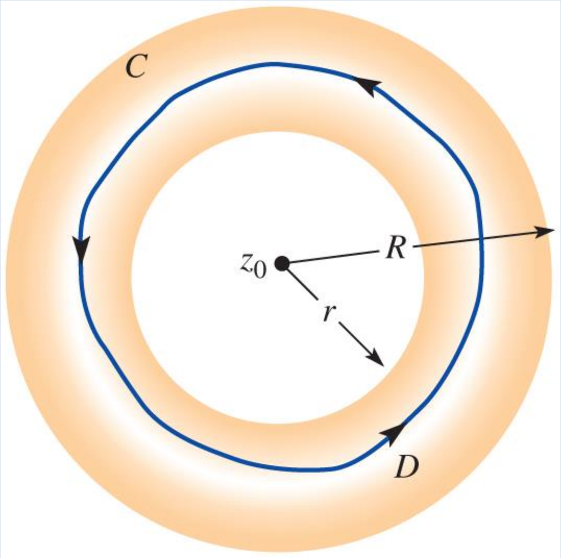

Figure 19.3.1: Contour in Theorem 19.3.1

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

- คืออนุกรมลอเรนต์เป็นตัวแทนสำหรับดิสก์เปิดแบบมีรู
  - ส่วนประกอบหลัก คือเทอมที่มีค่ากำลังติดลบของ $z - z_0$
  - ภาวะเอกฐานขจัดได้ (removable singularity) มีส่วนประกอบหลักเป็นซีโร
  - โพลมีส่วนประกอบหลัก เป็นจำนวนจำกัดที่ไม่ใช่เทอมที่เป็นศูนย์
  - ภาวะเอกฐานหลัก (essential singularity) มีส่วนประกอบหลักเป็นเทอมที่ไม่ใช่ศูนย์จำนวนอนันต์

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

- อนุกรมลอเรนต์สำหรับ f เมื่อ $z = z_0$ เป็นภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศ (isolated singularity) ถูกเขียนได้โดย

$z = z_0$	Laurent Series
Removable singularity	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Pole of order n	$\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Simple pole	$\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Essential singularity	$\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

ซีโรและโพล (Zeros and Poles)

- z_0 คือซีโรของฟังก์ชัน f ถ้า $f(z_0) = 0$
- ฟังก์ชันวิเคราะห์ f มีซีโรลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$ ถ้า

$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

- สำหรับฟังก์ชัน f และ g ทั้งคู่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $\mathrm{z} = z_0, f$ ซีโรลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$ และ $g(z_0) \neq 0$ ฟังก์ชัน $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ มีโพลลำดับ n ที่ $\mathrm{z} = z_0$
  - คุณสมบัตินี้สามารถหาโพลโดยวิธีการตรวจสอบ

ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง
(Residues and Residue Theorem)

- ค่าสัมประสิทธิ์ a_{-1} ในอนุกรมลอเรนต์ถูกเรียกว่า ส่วนตกค้าง (residue) ของ f ที่ภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศ a_0

$$a_{-1} = Res(f(z), z_0)$$

  – ที่โพลแบบง่าย,

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$$

  – ที่โพลลำดับ n,

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}(z - z_0)^n f(z)}{dz^{n-1}}$$

ส่วนตกค้างและทฤษฎีส่วนตกค้าง (Residues and Residue Theorem)

- ในบางกรณี, เราสามารถประเมินค่าอินทิกรัลเชิงซ้อนโดยการรวมส่วนตกค้างที่ภาวะเอกฐานที่เปนเอกเทศของ f ภายในคอนทัวร์ปิด C

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

การประมาณค่าอินทิกรัลจริง

(Evaluation of Real Integrals)

- พฤติกรรมของอินทิกรัล โดยที่ $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, ดีกรีของ $P(z)$ คือ n และ C_R คือ คอนทัวร์ครึ่งวงกลม $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$
  - สำหรับดีกรีของ $Q(z)$ ของ $m \geq n + 2$ และ $R \longrightarrow \infty$

$$\oint_C f(z)dz \longrightarrow 0$$

  - สำหรับดีกรีของ $Q(z)$ ของ $m \geq n + 1$ และ $R \longrightarrow \infty$

$$\oint_C \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)e^{i\alpha z}dz \longrightarrow 0$$

สำหรับ f ที่มีโพลแบบง่าย $\mathrm{z} = c$ อยู่บนแกนจริงของ C_R ถูกกำหนดโดย

$$z = c + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_R} f(z)\,dz = \pi i \; Res(f(z), c)$$